

TOPOGRAPHIE

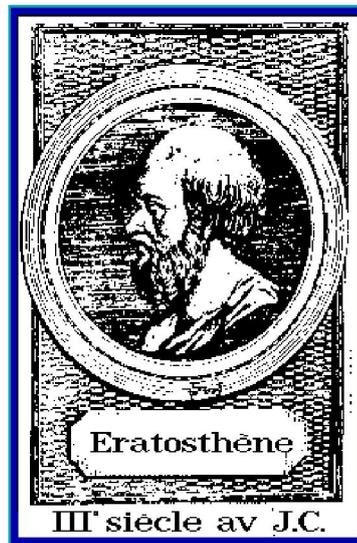
ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

Que nul n'entre s'il n'est géomètre



La tradition veut que cette phrase ait été gravée à l'entrée de l'Académie, l'école fondée à Athènes par Platon

Σ
Ρ
Η
Μ
Ε
Σ
Τ
Ο
Π
Ο
Γ
Ρ
Α
Φ
Ι
Ε



I INTRODUCTION

I.1 Finalité de la topographie

I.2 Comment atteindre ces objectifs

I.2.1 Etablissement de cartes à petite échelle

- I.2.1.a Perspective conique
- I.2.1.b Échelle et orientation des clichés
- I.2.1.c Visibilité des détails
- I.2.1.d Représentation plane
- I.2.1.e Interprétation des clichés
- I.2.1.f Systèmes d'informations géographiques

I.2.2 Cartographie à grande échelle

- I.2.2.a Lever de détails
- I.2.2.b Informations altimétriques sur cartes et plans
- I.2.2.c Canevas de points

II GEODESIE, CARTOGRAPHIE

II.1 Généralités et définitions

II.2 Formes et dimensions de la terre

- II.2.1 Geoïde
- II.2.2 Ellipsoïde de révolution
- II.2.3 Système de coordonnées
 - II.2.3.a Système géocentrique
 - II.2.3.b Système géographique
 - II.2.3.c Système géodésique

II.3 Représentation plane de l'ellipsoïde

- II.3.1 Le choix d'un système de projection
- II.3.2 Emploi en France de la représentation Lambert
 - II.3.2.a Méridien origine λ_0
 - II.3.2.b Isomètres centrales ϕ_0

II.4 Lecture des cartes

- II.4.1 Carte de base
- II.4.2 Définition du nord
- II.4.3 Renseignements portés en marge d'une carte

II.5 Réseaux géodésiques

- II.5.1 Historique de la triangulation
- II.5.2 Matérialisation des points géodésiques
 - II.5.2.a Borne géodésique
 - II.5.2.b Mire géodésique
 - II.5.2.c Signal
- II.5.3 Répertoires de l'IGN

II.6 Réseau altimétrique

- II.6.1 Surfaces de référence et altimétrie
- II.6.2 Constitution du réseau actuel (IGN 69)
 - II.6.2.a Bref historique
 - II.6.2.b Les repères de nivellement
 - II.6.2.c Répertoires de nivellement

III LES OUTILS MATHÉMATIQUES

III.1 Introduction

- III.1.1 Les croquis
- III.1.2 Le schéma général de calcul
- III.1.3 La présentation des calculs
- III.1.4 La présentation des résultats
- III.1.5 La précision des résultats
- III.1.6 Les contrôles
- III.1.7 Les constructions géométriques
- III.1.8 L'informatique

III.2 Les angles

- III.2.1 Le radian (rad)
- III.2.2 Le degré (deg ou °)
- III.2.3 Le grade (gon)

III.3 Les triangles

- III.3.1 Définitions
- III.3.2 Droites concourantes dans un triangle
- III.3.3 Cercle trigonométrique
- III.3.4 Relations dans les triangles quelconques
 - III.3.4.a Relations de base
 - III.3.4.b Surface d'un triangle

III.4 Extensions de certaines formules aux polygones**III.5 Surface d'un polygone quelconque**

- III.5.1 Les sommets sont connus en coordonnées cartésiennes x,y
- III.5.2 Les sommets sont connus en coordonnées polaires
- III.5.3 Formules complémentaires

III.6 Volumes

- III.6.1 Formules des trois niveaux
- III.6.2 Formule de la moyenne des bases
- III.6.3 Calcul exact par décomposition en volumes élémentaires

III.7 Système de coordonnées rectangulaires et polaires

- III.7.1 Transformation de coordonnées d'un système à l'autre
 - III.7.1.a Coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires mathématiques
 - III.7.1.b Coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires topographiques
- III.7.2 Changement de repère
 - III.7.2.a Translation de repère
 - III.7.2.b Rotation de repère
 - III.7.2.c Translation puis rotation
 - III.7.2.d Rotation puis translation
- III.7.3 Calcul de gisement
 - III.7.3.a Définition
 - III.7.3.b Calcul d'un gisement à partir des coordonnées cartésiennes
 - III.7.3.c Utilisation du gisement pour les calculs de coordonnées

III.8 La théorie des erreurs

- III.8.1 Mesures topométriques
- III.8.2 Les erreurs en topométrie
 - III.8.2.a Fautes ou erreurs parasites
 - III.8.2.b Les erreurs
 - III.8.2.b.1 Les erreurs systématiques
 - III.8.2.b.2 Les erreurs accidentelles

IV LE NIVELLEMENT DIRECT**IV.1 Principe****IV.2 Le niveau**

- IV.2.1 Principe de fonctionnement
- IV.2.2 Mise en station d'un niveau
- IV.2.3 Le niveau automatique
- IV.2.4 La lunette
- IV.2.5 Lectures sur mire
- IV.2.6 Estimation de la portée par stadimétrie
- IV.2.7 Niveaux numériques

IV.3 Cheminement simple

- IV.3.1 Pratique du nivellement par cheminement
- IV.3.2 Fermeture de cheminement
- IV.3.3 Compensation du cheminement
- IV.3.4 Exemple d'un carnet de nivellement

IV.4 Cheminement mixte

V MESURES ANGULAIRES

V.1 Le théodolite optico-mécanique

- V.1.1 Principe de fonctionnement
- V.1.2 Mise en station

V.2 Précision des mesures angulaires

- V.2.1 Erreurs systématiques dues à un défaut de l'appareil
- V.2.2 Erreurs systématiques dues à une cause extérieure
- V.2.3 Erreurs accidentelles

V.3 Les angles horizontaux

- V.3.1 Le cercle horizontal
- V.3.2 Le double retournement
- V.3.3 Terminologie des mesures d'angles horizontaux
 - V.3.3.a Lecture simple
 - V.3.3.b Séquence
 - V.3.3.c Paire de séquences
 - V.3.3.d Tour d'horizon
 - V.3.3.e Paire de séquences réduite

V.4 Les angles verticaux

- V.4.1 Le cercle vertical
- V.4.2 Le double retournement

VI MESURES DES DISTANCES

VI.1 Historique

VI.2 Mesures des distances à l'aide d'une chaîne

VI.3 Mesure en terrain régulier

- VI.3.1 Terrain régulier et horizontal
- VI.3.2 Terrain en pente régulière

VI.4 Mesure en terrain irrégulier

- VI.4.1 Mesure par ressauts horizontaux
- VI.4.2 Mesure en mode suspendu

VI.5 Mesures stadimétriques

VI.6 Mesure par I.M.E.L

TOPOGRAPHIE

Novembre 2013

Les objectifs de ce cours sont:

- D'acquérir les bases de la topographie.
- D'acquérir la pratique du relevé.
- D'utiliser les matériels actuels sur des cas simples.



I INTRODUCTION

I.1 Finalité de la topographie

Comme souvent, il est pratique de partir de la finalité pour remonter aux techniques mises en œuvre et les justifier ainsi. En schématisant, on peut dire que la topographie a pour objectifs principaux de permettre l'établissement de cartes et de plans graphiques sur lesquels sont représentées, sous forme symbolique, toutes les informations ayant trait à la topologie du terrain et à ses détails naturels et artificiels. Cette cartographie de données existantes permettra par exemple de s'orienter sur le terrain ou bien d'étudier un projet de construction

I.2 Comment atteindre ces objectifs

I.2.1 Etablissement de cartes à petite échelle

La première idée qui vient à l'esprit est d'effectuer des prises de vue aériennes par avion ou par satellite puis de transcrire ces informations sur papier. Développons cet exemple.

I.2.1.a Perspective conique

Une photographie est une perspective conique et non une représentation plane. De plus, le relief n'apparaît pas sur une photographie... La photogrammétrie permet de remédier à ces problèmes : on obtient une vision du relief et une restitution plane de plusieurs photographies grâce à l'observation de couples de clichés dans des appareils spécifiques (appareils de restitution photogramétrique). Le tracé des courbes de niveau sur la carte permet d'avoir une idée précise de son relief.

I.2.1.b Échelle et orientation des clichés

Une photographie ne permet pas d'obtenir une échelle constante et précise sur toute sa surface. De plus, les différents clichés devront pouvoir être juxtaposés afin d'obtenir des cartes plus étendues ; ils doivent donc être orientés les uns par rapport aux autres en respectant exactement la même échelle. Ces problèmes introduisent la nécessité de disposer d'un système de coordonnées général dans lequel des points d'appui sont connus dans les trois dimensions (X, Y et Z). On se sert de quelques points repérés sur un cliché et connus dans le système de coordonnées général pour effectuer un calage et une mise à l'échelle des clichés. Ceci implique donc de disposer sur le terrain d'un moyen de matérialisation du repère général, par exemple des points d'appui connus. Les réseaux géodésiques de points connus en planimétrie (coordonnées X, Y) et/ou en altimétrie (coordonnée Z) permettent de répondre à cet objectif en mettant à la disposition de chacun un canevas de points déterminés de manière absolue et avec la plus grande précision possible dans le système général. Une des missions de l'IGN (Institut Géographique National) est de mesurer et de tenir à jour ce canevas. Il est évident que plus il est dense et plus les opérations de positionnement sur le terrain sont facilitées.

I.2.1.c Visibilité des détails

Tous les détails du terrain ne sont pas visibles sur un cliché, certains étant cachés par des constructions ou de la végétation, etc. Il faut donc compléter les manques d'information d'un cliché par des mesures sur le terrain. Par exemple, pour ajouter le tracé d'un chemin forestier, il faut déterminer ses points d'axe dans le repère général et mesurer sa largeur ; donc être capable de mesurer des coordonnées relatives sur le terrain dans les trois dimensions X, Y et Z. Ceci introduit la nécessité de disposer d'appareils de mesure de distances et d'angles : le théodolite permet d'accéder aux informations angulaires, les mesures de distances sont réalisées avec de nombreux instruments, les plus courants étant le ruban et l'instrument de mesure électronique des longueurs (IMEL). Pour effectuer des mesures relatives en altimétrie, on utilise la technique du nivellement indirect avec un théodolite couplé à un IMEL ou bien, pour plus de précision, le nivellement direct avec des appareils appelés niveaux. La technologie GPS permet le calcul direct de coordonnées d'un point dans un système géocentrique sans mesure d'angles ni de distances. Elle donne ainsi un accès direct à un système général en tout point du territoire avec une grande précision (de l'ordre de quelques millimètres au km). Il faut tout de même disposer d'au moins un point d'appui car la détermination précise est relative et non pas absolue.

I.2.1.d Représentation plane

Pour juxtaposer plusieurs clichés et obtenir une carte à petite échelle (par exemple, la carte de base au 1/25 000 éditée par l'IGN), on se heurte au problème de la représentation plane de la « sphère » terrestre. Il est physiquement impossible de représenter une surface sphérique à plat sur une carte, sans déformations. De plus, la terre n'est pas une sphère : elle est plus proche d'un « ellipsoïde » de révolution. Pour obtenir des cartes cohérentes à petite échelle, il faut donc étudier la forme de la terre – c'est une des finalités de la géodésie qui devra en particulier définir les axes de référence du système de coordonnées général ou encore définir la surface de référence des altitudes – et mettre au point des systèmes de projection

qui minimisent les déformations. Il faut également s'intéresser à la formation et à l'évolution du relief terrestre au travers de la topologie. La juxtaposition des cartes à l'échelle de plusieurs nations nécessite une harmonisation des systèmes de projection et de coordonnées adoptés dans chaque pays (par exemple le réseau européen EUREF).

I.2.1.e Interprétation des clichés

Les détails visibles sur un cliché ne sont pas toujours faciles à identifier pour des non-spécialistes : nous ne sommes pas habitués à la vision « cartographique » de notre environnement. La représentation finale devra donc interpréter et rendre lisibles les très nombreuses informations d'une photographie.

I.2.1.f Systèmes d'informations géographiques

La cartographie moderne ne se satisfait plus des seules informations géométriques du terrain : on cherche de plus en plus à leur associer des informations thématiques. Par exemple, associer à une parcelle de terrain le nom de son propriétaire, la surface constructible ou construite, etc. Ceci ouvre la voie des systèmes de traitement numérique des clichés en association avec des banques de données géographiques (SIG ou Systèmes d'Information Géographiques).

I.2.2 Cartographie à grande échelle

Raisonnons maintenant à partir d'un autre exemple : la préparation, l'exécution et le suivi d'un chantier de construction.

I.2.2.a Lever de détails

Pour un chantier, il faut disposer de plans et de cartes à moyenne et grande échelle que la photogrammétrie ne peut pas toujours fournir, pour des questions de précision et de coût. Il faut donc établir cartes et plans en allant lever sur le terrain la position et la nature des objets naturels et artificiels : cette opération peut être faite par des mesures d'angles, de distances et

de différences d'altitudes ou par des mesures GPS qui fourniront des coordonnées dans le système général. Pour certaines constructions de petite étendue, très isolées ou ne disposant pas à proximité de points d'appui matérialisant le système général de coordonnées, on peut simplement travailler dans un repère local associé à la construction. L'outil idéal pour ce type d'opération est la station totale ou le niveau numérique en raison de leur facilité d'emploi et de leurs possibilités de stockage des informations récupérées ensuite par un logiciel informatique.

I.2.2.b Informations altimétriques sur cartes et plans

Avant la réalisation d'un projet de construction, une phase d'étude permet d'en prévoir le coût, la faisabilité, l'impact sur l'environnement, etc. Les informations sur l'altimétrie du terrain naturel sont souvent primordiales : elles permettent, par exemple, à partir des calculs de profils en long et en travers, de chiffrer les projets routiers, les courbes de niveau étant la principale information altimétrique sur les cartes et les plans.

Remarque: Un logiciel de topographie performant est capable de récupérer les informations levées sur le terrain et de tracer à partir d'un semi de points (ensemble de points régulièrement répartis sur le terrain et connus en coordonnées tridimensionnelles) une modélisation du terrain (modèle numérique de terrain ou MNT), puis d'en déduire les courbes de niveau. Les calculs se poursuivent ensuite par des tracés et calculs automatiques de profils en long, profils en travers, cubatures, etc.

I.2.2.c Canevas de points

Enfin, un projet de construction nécessite le positionnement sur le terrain des axes des travaux à réaliser ainsi que leur contrôle en cours d'exécution. La construction à réaliser s'insérant généralement dans un ensemble existant, il faut s'appuyer sur un canevas de points connus en système général ou local. L'une des premières tâches à accomplir en début de chantier consiste donc à disposer à proximité des repères planimétriques et altimétriques durables et accessibles. Les différentes techniques d'implantation nécessitent de nombreux calculs fondés sur des connaissances mathématiques. Parmi les techniques modernes employées sur les chantiers pour le guidage et le positionnement, le laser est de plus en plus répandu.

II GEODESIE, CARTOGRAPHIE

II.1 Généralités et définitions

La géodésie est une des sciences de base nécessaires au topographe. Sa maîtrise n'est pas indispensable : elle relève du domaine du spécialiste mais un aperçu centré sur les incidences de la forme et des caractéristiques de la terre sur la topographie est indispensable. Ceci permet d'introduire et de justifier les problèmes de projection plane et leurs incidences sur la carte de base, les choix de points et de surfaces de référence pour un système de coordonnées général, etc. Mais, définissons dans un premier temps, le vocabulaire de base.

- **Topométrie**: du grec topos signifiant le **lieu** et métrie signifiant l'opération de **mesurer**. C'est donc l'ensemble des techniques permettant d'obtenir les éléments métriques indispensables à la réalisation d'un plan à grande ou très grande échelle. Ces éléments nécessitent différentes mesures sur le terrain suivies de nombreux calculs, schémas et croquis. C'est un domaine vaste qui demande de nombreuses compétences auxquelles l'outil informatique est aujourd'hui indispensable.
- **Topographie**: association de topos et de graphein qui, en grec, signifie **décrire**. C'est donc la science qui donne les moyens de représentation graphique ou numérique d'une surface terrestre. La nuance entre ces deux techniques réside dans le fait qu'en topographie le terrain est représenté in situ alors qu'en topométrie les calculs et reports sont des phases ultérieures au travail sur le site.
- **Topologie**: c'est la science qui analyse les lois générales de la formation du relief par les déformations lentes des aires continentales appelées mouvements épirogéniques, atténués ultérieurement par les actions externes : érosion due à la mer, au vent, à la glace, à l'eau et à la neige.
- **Géodésie**: c'est la science qui étudie la forme de la terre. Par extension, elle regroupe l'ensemble des techniques ayant pour but de déterminer les positions planimétriques et altimétriques d'un certain nombre de points géodésiques et repères de nivellement.
- **Cartographie**: c'est l'ensemble des études et opérations scientifiques, artistiques et techniques intervenant à partir d'observations directes ou de l'exploitation d'un document en vue d'élaborer des cartes, plans et autres moyens d'expression.
- **Canevas**: c'est l'ensemble des points connus en planimétrie et/ou en altimétrie avec une précision absolue homogène.

II.2 Formes et dimensions de la terre

II.2.1 Geoïde

En apparence la Terre a la forme d'une sphère. En fait, elle est légèrement déformée par la force centrifuge induite par sa rotation autour de l'axe des pôles : la Terre n'est pas un corps rigide. Cette déformation est relativement faible : «tassement» de 11 km au niveau des pôles par rapport à un rayon moyen de 6 367 km et «renflement» de 11 km au niveau de l'équateur. Elle a donc l'aspect d'un ellipsoïde de révolution dont le petit axe est l'axe de rotation : l'axe des pôles.

La **Terre est une surface en équilibre**. La surface du niveau moyen des mers et océans au repos n'a pourtant pas une forme régulière et ne coïncide ainsi pas avec un ellipsoïde de révolution : elle n'est pas régulière mais ondulée, présente des creux et des bosses. Par exemple, la surface de la mer se bombe au-dessus d'un volcan et se creuse au-dessus des grandes fosses océaniques parce que les reliefs créent des excès ou des déficits de matière produisant ainsi des variations locales du champ de pesanteur. Or la surface d'un fluide en équilibre est en tout point normale aux forces de pesanteur : on dit qu'elle est **équipotentielle du champ de pesanteur**. La Terre, non rigide, peut être considérée comme un fluide ; la direction des forces de pesanteur varie d'un endroit à un autre en raison de la répartition hétérogène de la matière composant la Terre. **Sa surface n'est donc pas régulière.**

La surface des mers et océans au repos recouvrant toute la Terre est appelée **géοïde**. Le géοïde, niveau des mers prolongé sous les continents, est donc une surface gauche à laquelle on ne saurait appliquer des relations mathématiques de transformation. Il est la surface de référence pour la détermination des altitudes, autrement dit la surface de niveau zéro. En réalité, la référence en altitude dépend du choix du **repère fondamental** et du **système d'altitude**. Il s'ensuit que la surface de niveau zéro est légèrement différente du géοïde ; l'écart est constant et représente l'altitude du point fondamental au-dessus du géοïde.

Remarque: Lorsque le topographe (ou le maçon) cale la bulle de son niveau, il matérialise un plan tangent au géοïde qui correspond à la surface d'équilibre des eaux (pente d'écoulement des eaux nulle). On obtient ainsi partout l'orientation de la verticale physique d'un lieu. Il est intéressant de noter qu'aucune autre référence n'offre de telles facilités

II.2.2 Ellipsoïde de révolution

La surface la plus proche du géοïde est un **ellipsoïde de révolution**, c'est-à-dire un volume engendré par la rotation d'une ellipse autour d'un de ses deux axes. La terre tournant autour de l'axe des pôles (de demi-longueur b , fig. 2.2.), cette rotation engendre un cercle équatorial de rayon a . Les dimensions de l'ellipsoïde sont déterminées en comparant la distance par mesures géodésiques et la différence de latitude par mesures astronomiques entre deux points d'un même méridien.

Un méridien est l'intersection de la surface de l'ellipsoïde avec un plan contenant l'axe des pôles : c'est donc une ellipse. Un parallèle est l'intersection de la surface de l'ellipsoïde avec un plan perpendiculaire à l'axe des pôles : c'est donc un cercle. Tous les méridiens sont égaux entre eux (à quelques écarts près). Leur rayon de courbure diminue des pôles vers l'équateur, donc leur courbure (inverse du rayon) augmente.

Il n'existe pas un **ellipsoïde global unique** mais **plusieurs ellipsoïdes locaux** définis pour chaque pays, chacun adoptant un ellipsoïde le plus proche possible du géοïde local. Ceci explique que les ellipsoïdes diffèrent d'un pays à l'autre. Pour la géodésie française, on utilise l'ellipsoïde défini en 1880 par Clarke et dont les caractéristiques, très légèrement modifiées par l'IGN par rapport à l'ellipsoïde initial, sont les suivantes :

- Demi-grand axe :	$a = 6\,378\,249,20$ m
- Demi-petit axe :	$b = 6\,356\,515,00$ m
- Aplatissement f (flattening) :	$f = (a - b) / a = 1 / 293,4660213$
- Excentricité e :	$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2 = 0,006\,803\,487\,646$

C'est l'ellipsoïde de référence actuellement utilisé comme surface de projection pour l'établissement de cartes et plans assez étendus. Il a été choisi le plus proche possible du géοïde, c'est pourquoi, il est tangent au géοïde au Panthéon, à Paris et les écarts entre géοïde et ellipsoïde ne dépassent pas 14 m en France. Ces caractéristiques sont en cours de modification afin de mettre en place un système international, de plus en plus nécessaire. Le développement du GPS et des travaux de géodésie réalisés au niveau européen imposent ces modifications.

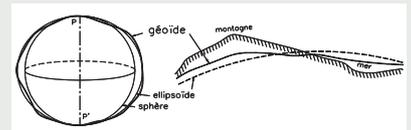


Fig. 2.1. : Ellipsoïde et géοïde

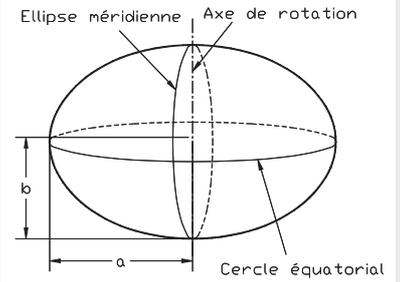
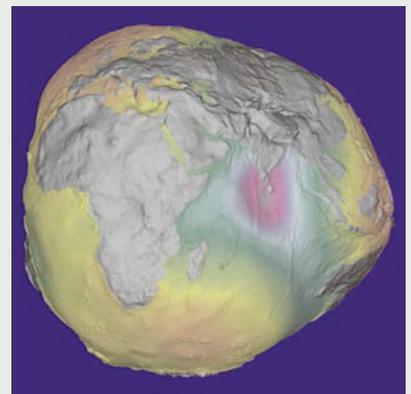


Fig. 2.2. : Ellipsoïde de révolution



II.2.3 Système de coordonnées

II.2.3.a Système géocentrique

Un système de référence géocentrique est un repère (O, X, Y, Z) (fig. 2.3-a.) tel que :

- O est proche du centre des masses de la terre (au mieux à quelques dizaines de mètres près pour les systèmes réalisés par géodésie spatiale) ;
- l'axe OZ est proche de l'axe de rotation terrestre ;
- le plan OXZ est proche du plan du méridien origine.

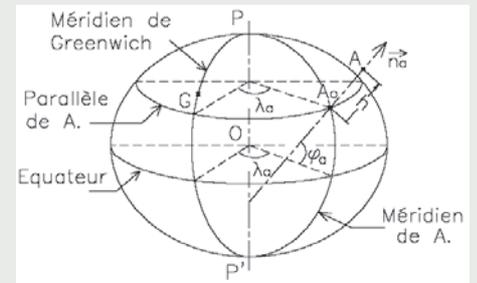


Fig. 2.3-a. : Coordonnées géocentriques

Dans un système de référence géodésique, un point de la croûte terrestre est considéré fixe bien qu'il soit soumis à de faibles mouvements, dus aux marées terrestres, d'une amplitude inférieure à 30 cm et aux mouvements tectoniques, provoquant des déplacements inférieurs à 10 cm par an.

II.2.3.b Système géographique

L'axe de rotation de la terre est l'axe des pôles PP'. Le cercle perpendiculaire à l'axe des pôles est l'équateur. La demi-ellipse méridienne passant par les pôles et par un point A est la méridienne de A (fig. 2.3-b.).

Un point sur l'ellipsoïde est repéré par sa **longitude** et sa **latitude** (rapportées à la normale (n_a) à l'ellipsoïde en A). Elles sont définies ci-après:

- **Longitude** (λ) : la longitude λ d'un lieu A est l'angle dièdre formé par le méridien du lieu avec le méridien origine. Elle est comprise entre 0° et 180° Est ou Ouest. Le méridien origine international est celui de Greenwich (observatoire de la banlieue de Londres).
- **Latitude** (φ) : la latitude de A est l'angle φ que fait la verticale (n_a) de A avec le plan de l'équateur. Elle est comprise entre 0 à 90° Nord ou Sud. Les cercles perpendiculaires à la ligne des pôles PP' sont appelés parallèles : ils sont parallèles au plan de l'équateur.

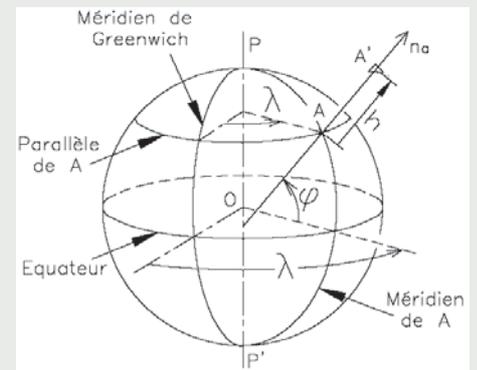


Fig. 2.3-b. : Coordonnées géographiques

Hauteur ellipsoïdale (h) : à un point A' situé sur la surface de la terre et sur la même verticale que A, on associera une troisième coordonnée correspondant à la hauteur au-dessus de l'ellipsoïde, notée h, mesurée suivant la normale (n_a) .

II.2.3.c Système géodésique

Un système géodésique est défini par :

- un ellipsoïde, choisi le plus proche possible du géoïde local
- un système de représentation plane
- un point fondamental (sauf dans le cas d'un système géocentrique où il n'y a pas de point fondamental) dont les coordonnées sont déterminées par des mesures astronomiques ; en ce point, la normale à l'ellipsoïde est confondue avec la verticale, c'est-à-dire la normale au géoïde.

La réalisation d'un système géodésique est concrétisée sur le terrain par un réseau de points connus en coordonnées dans ce système. Cette réalisation étant fonction des techniques de mesure, de calcul et de leurs évolutions, il peut exister plusieurs réalisations d'un même système géodésiques.

II.3 Représentation plane de l'ellipsoïde

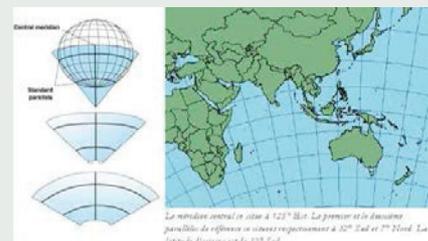
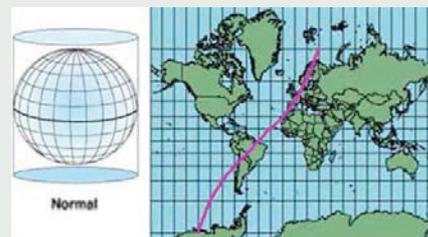
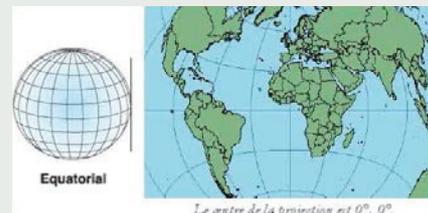
Tous les systèmes de projection de la surface d'un ellipsoïde sur un plan déforment les longueurs. Par suite, la représentation plane de l'ellipsoïde n'est qu'une correspondance ponctuelle entre points de l'ellipsoïde $M(\lambda, \varphi)$ et points du plan $m(E, N)$, E pour coordonnée Est (ou x) et N pour Nord (ou y). Les figures tracées sur l'ellipsoïde seront donc déformées quelle que soit la représentation adoptée.

II.3.1 Le choix d'un système de projection

La question du choix d'un système de projection est la question-clé de tout cartographe: comment représenter sur un plan (la feuille de la carte, à 2 dimensions) une portion de sphère (la Terre, à 3 dimensions)? En effet, on ne peut pas aplatir une peau d'orange sans la déchirer.

Il existe un nombre impressionnant de systèmes de projection ou de coordonnées. Une telle variété s'explique par le fait que les cartes ne peuvent respecter en même temps les distances, les surfaces (on parle alors d'équivalence), et les angles (on parle alors de conformité), mais seulement 2, voire 1 seul de ces critères, et quelquefois encore, dans certaines zones ou directions seulement: ces contraintes ont attisé l'inventivité des cartographes, donc engendré de très nombreux modèles et variantes. En exceptant quelques "bizarreries", on peut classer les systèmes de projections en 3 catégories:

- les **projections azimutales** (appelées aussi planaires, ou zénithales): elles sont centrées sur un point (un pôle, un point de l'Equateur, ou un point quelconque entre les 2, dit "oblique"). Tangentes ou sécantes, elles transforment les méridiens en rayons également espacés qui partent de l'origine, et les parallèles en cercles concentriques autour de cette origine (et pas forcément régulièrement espacés). Des variantes appliquent des déformations diverses pour obtenir des résultats particuliers: ainsi, l'image ci-contre montre une projection équidistante azimutale dans laquelle la distance et la direction, mesurées à partir du point central, sont toutes deux exactes.
- les **projections équatoriales** (appelées aussi cylindriques): tangentes ou sécantes à un grand cercle du globe, elles transforment les méridiens en droites verticales également espacées et les parallèles en droites horizontales (non nécessairement régulièrement espacées). L'image ci-contre schématise la très célèbre projection de Mercator. A proximité de l'équateur, les parallèles et les méridiens forment des carrés, puis les parallèles s'écartent de plus en plus à mesure qu'on s'en éloigne. Sous cette projection, les angles sont conservés mais pas les surfaces: il s'agit d'une projection conforme non équivalente. On remarque qu'un avion partant du Grand Nord pour l'Antarctique en suivant imperturbablement un cap sud-ouest (225°) trace sur cette carte une ligne doublement incurvée et non une droite.
- les **projections coniques**: elles transforment les méridiens en rayons partant de l'origine, régulièrement espacés mais ne constituant pas nécessairement un tour complet, et les parallèles en cercles concentriques autour de l'origine (non nécessairement régulièrement espacés). Elles peuvent être tangentes ou sécantes. L'image ci-contre schématise une projection conique sécante le long de 2 parallèles standards, développée à l'est et à l'ouest d'un méridien central. Selon l'espacement entre les parallèles, on obtient des résultats différents. Lorsqu'ils sont également espacés (c'est le cas dans la projection conique et équidistante) la projection est équidistante Nord - Sud mais elle n'est ni conforme ni équivalente. Pour les petites surfaces, la distorsion totale est minime. Mais ici, sur la très répandue projection conique conforme de Lambert, les parallèles centraux sont moins espacés que les parallèles se trouvant près des bords, et les petites formes géographiques sont conservées quelle que soit l'échelle de la carte.



II.3.2 Emploi en France de la représentation Lambert

La représentation plane de l'ellipsoïde de Clarke est utilisée en géodésie et cartographie sous forme de zones à champ restreint dans le but de limiter les déformations de réduction à la projection

II.3.2.a Méridien origine λ_0

Le méridien origine ($\lambda = \lambda_0$) est le méridien de Paris situé à l'Observatoire de Paris. Il est à une longitude $l_0 = 2,596\ 921\ 296$ gon à l'Est du méridien de Greenwich. En France, le méridien de Greenwich passe à proximité des villes de Tarbes, Angoulême, Le Mans et Le Havre et celui de Paris près de Carcassonne, Bourges et Amiens.

II.3.2.b Isomètres centrales ϕ_0

La France métropolitaine est divisée en quatre zones étagées du Nord au Sud dont la latitude des isomètres centrales est : 55 gon pour la zone « Nord » dite Lambert I ; 52 gon pour la zone « centre » dite Lambert II ; 49 gon pour la zone « Sud » dite Lambert III ; 46,85 gon pour la Corse dite zone Lambert IV.

La carte (fig. 2.28.) montre le **quadrillage Lambert** par rapport aux méridiens et parallèles. Chaque méridien devrait être constitué en projection de quatre lignes brisées correspondant aux quatre zones Lambert, invisible à cette échelle. En effet, les méridiens sont perpendiculaires aux images des parallèles origines (isomètres centrales) et ces parallèles ne sont pas rigoureusement concentriques (fig. 2.27.).

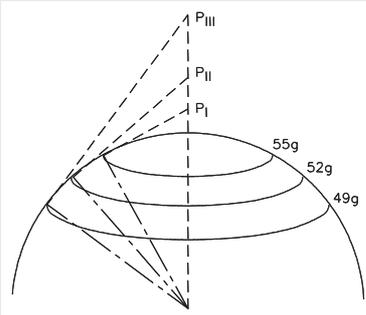


Fig. 2.27. : Trois cônes de projection

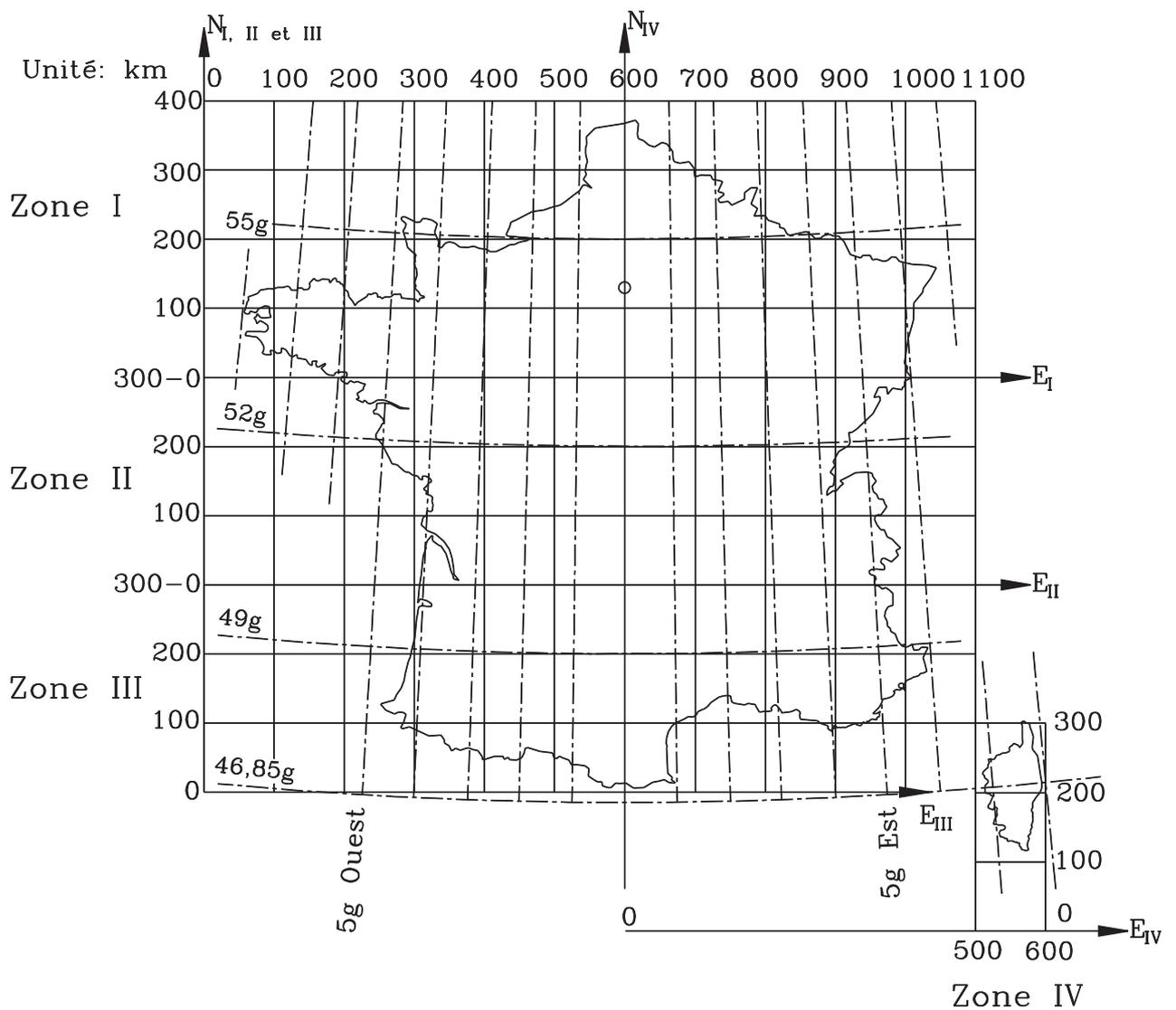
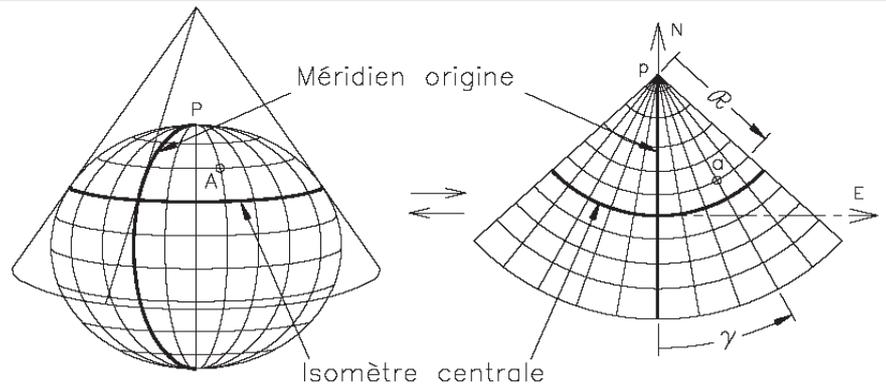


Fig. 2.28. : Quadrillage du système Lambert national

II.4 Lecture des cartes

II.4.1 Carte de base

On a établi au paragraphe précédent que le système de représentation Lambert est une projection de la France au voisinage d'une isomètre centrale sur un cône tangent à cette isomètre. Les méridiens sont donc des droites convergentes vers l'image p du pôle P et les parallèles des arcs de cercles concentriques de rayon R.

Les feuilles de la carte de France au 1/25 000 sont découpées le long de méridiens et parallèles (ceci explique qu'une carte IGN se lit toujours face au nord géographique) ; les côtés Est et Ouest de la carte sont donc convergents et les côtés Nord et Sud sont des arcs de cercles (fig. 2.33.). Si la convergence et la courbure sont difficilement décelables, on constate qu'une carte du Nord est plus étroite qu'une carte du Sud de la France.

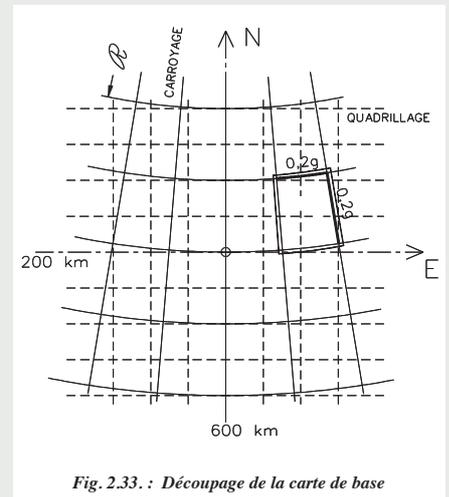


Fig. 2.33. : Découpage de la carte de base

II.4.2 Définition du nord

Sur une carte IGN, on remarque en légende le croquis ci-contre (fig. 2.34.). Il est mentionné : « La déclinaison magnétique correspond au centre de la feuille, au 1er Janvier 1993. Elle diminue chaque année de 0,16 gon (0° 08') ». Le nord géographique et le nord magnétique sont distincts.

- Le **nord géographique** est la direction du méridien du point (ici le centre de la carte) vers le pôle Nord.
- Le **nord magnétique** est la direction de l'aiguille aimantée, c'est-à-dire du champ magnétique terrestre du moment et du lieu. Le champ magnétique terrestre, plus intense aux pôles que dans les régions équatoriales, est tel que ses lignes de champ ne suivent pas la direction des méridiens mais l'axe des pôles géomagnétiques est incliné de 11° 30' sur l'axe terrestre. Il est en outre sujet à de lentes variations d'orientation

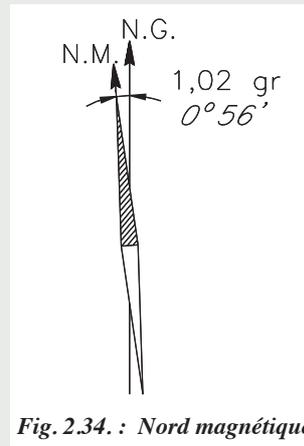


Fig. 2.34. : Nord magnétique

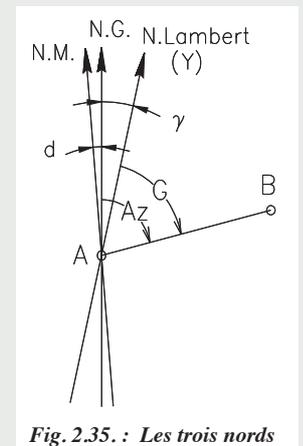


Fig. 2.35. : Les trois nord

L'angle entre le nord géographique et le nord magnétique est la **déclinaison magnétique d** : elle varie dans le temps et dans l'espace (actuellement elle diminue d'environ 0,16 gon par an). Actuellement, la déclinaison est occidentale.

Le « Nord » du quadrillage du système de projection est la direction des ordonnées Y positifs en ce point (fig. 2.35.) ; il est encore appelé Nord Lambert.

Dans le système de projection Lambert, l'angle entre le Nord géographique et la direction des ordonnées Y positifs en un point est la **convergence des méridiens γ**.

On appelle:

- **Azimuth Az** l'angle compté positivement en sens horaire depuis le nord géographique
- **Gisement G** l'angle compté positivement en sens horaire depuis le nord Lambert.

II.4.3 Renseignements portés en marge d'une carte

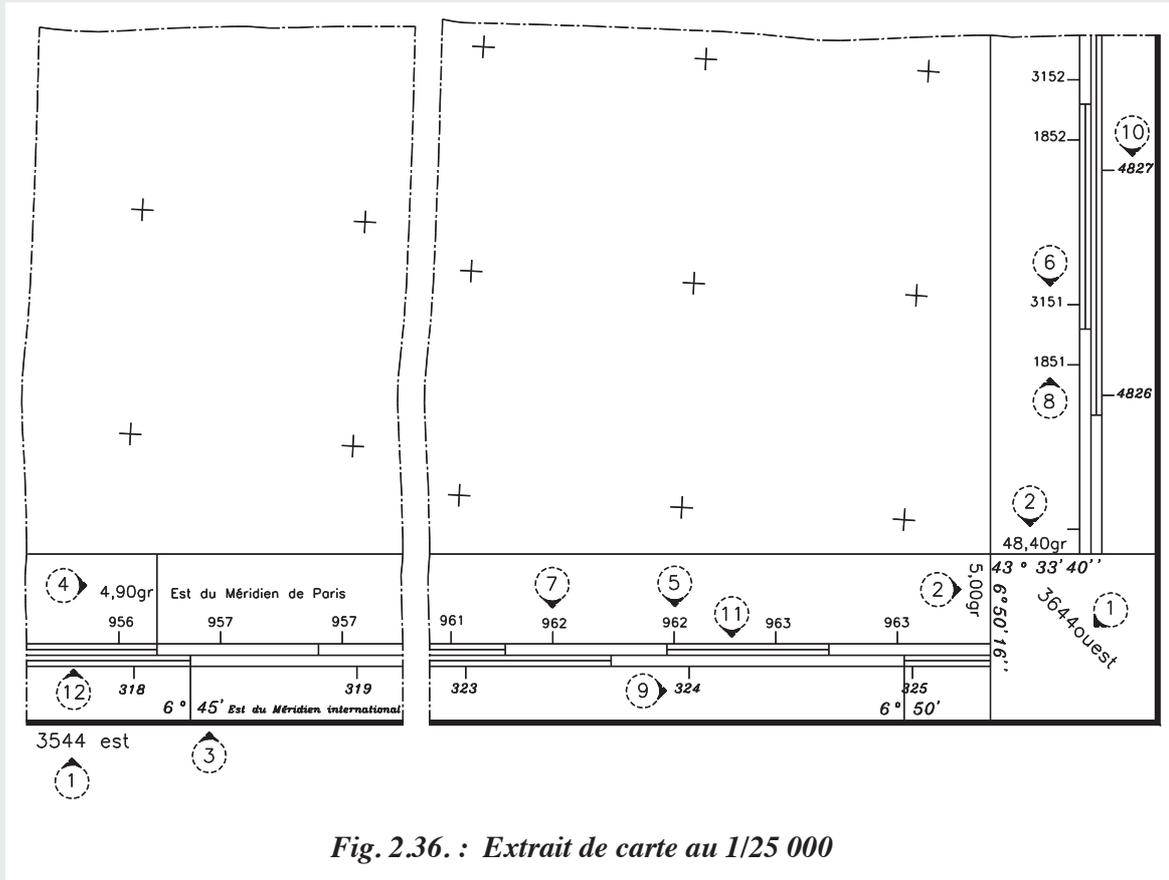
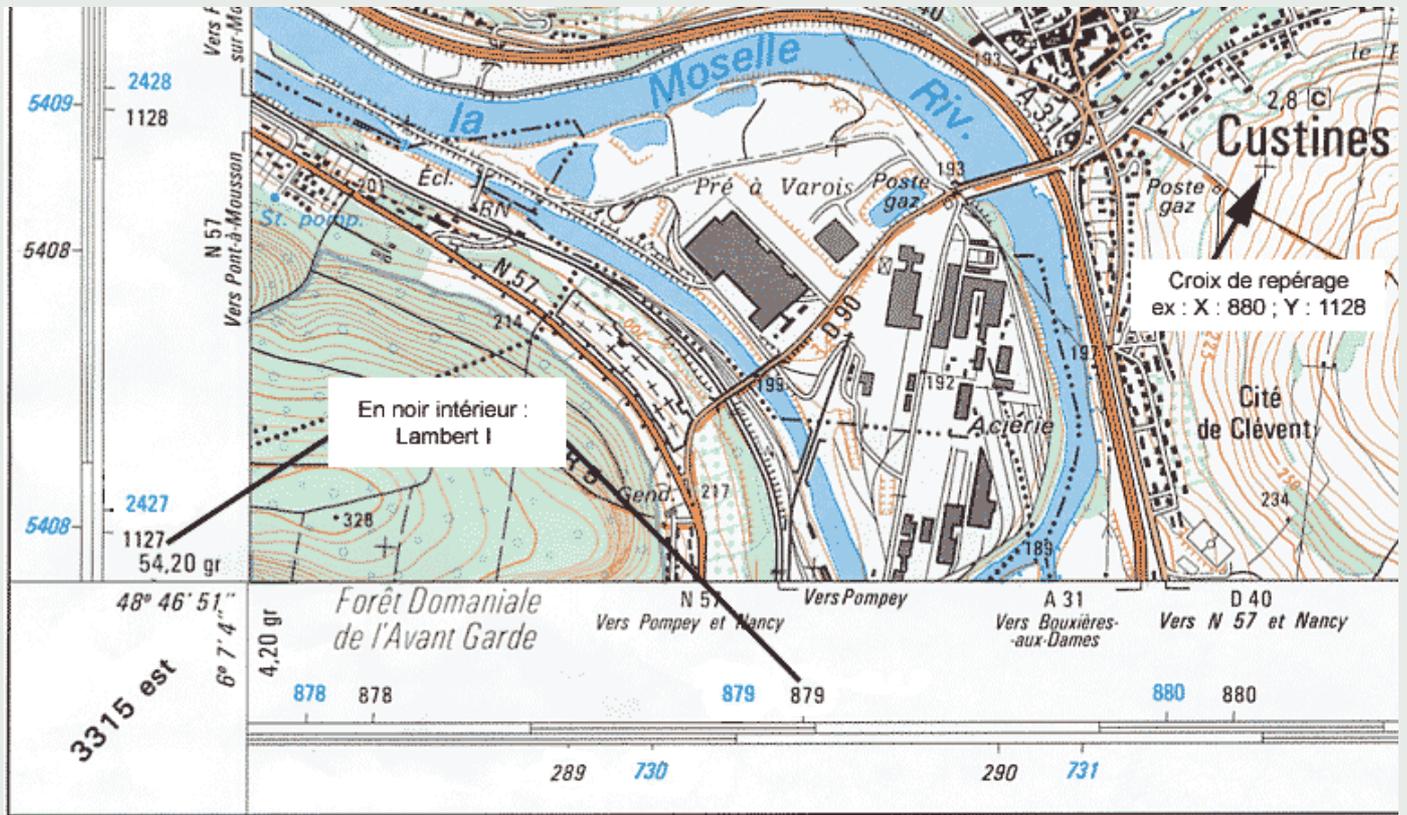


Fig. 2.36. : Extrait de carte au 1/25 000



- **Repère 1** : numérotation des feuilles adjacentes.
- **Repère 2** : en général, le découpage d'une feuille au 1/25 000 se fait suivant les méridiens et les parallèles de 0,20 gon en 0,20 gon, représentant une superficie de l'ordre de 20×13 à 15 km. Le méridien origine est le méridien de Paris. La longitude et la latitude des méridiens et parallèles limitant la carte sont aussi données en degrés sur l'ellipsoïde Hayford 09 ; les longitudes sont exprimées par rapport au méridien international de Greenwich.
- **Repère 3** : l'échelle extérieure permet de déterminer les coordonnées géographiques en degrés dans le système européen (ellipsoïde de Hayford), le méridien 0° étant le méridien de Greenwich. Elles sont indiquées toutes les cinq minutes sexagésimales. L'échelle extérieure (12) est graduée toutes les minutes sexagésimales.
- **Repère 4** : l'échelle intérieure sert à déterminer les coordonnées géographiques en gons rapportées au système géodésique français, le méridien origine étant le méridien de Paris. Elles sont indiquées tous les 0,10 gon. L'échelle intérieure (11) est graduée tous les 0,01 gon.
- **Repères 5 et 6** : à l'intérieur du cadre sont portées les amorces du quadrillage kilométrique de la représentation conique conforme Lambert. Un chiffre précédant l'ordonnée précise la zone dans laquelle se situe la carte : 3 151 indique que le point est situé en zone Lambert III, l'ordonnée à lire étant 151 km.
- **Repères 7 et 8** : afin d'avoir un système unique de repérage pour la France, la chiffration de la zone II étendue est éditée en bleu. Le premier chiffre, ici 1, ne représente pas un numéro de zone mais l'ordonnée calculée par rapport à l'ordonnée origine vaut 2 200 m en zone II.
- **Repères 9 et 10** : à l'extérieur du cadre, les amorces sont celles du quadrillage kilométrique Universal Transverse Mercator (UTM). Généralement, les fuseaux 29 et 31 sont chiffrés en noir, le fuseau 30 est chiffré en bleu.
- **Repère 11** : échelle intérieure (voir le repère 4) d'intervalle 0,01 gon.
- **Repère 12** : échelle extérieure (voir le repère 3) d'intervalle 1 minute.

II.5 Réseaux géodésiques

Comme nous l'avons souligné en introduction de ce chapitre, un réseau de points connus en planimétrie est nécessaire pour effectuer la majorité des travaux de topographie. Ce n'est pas indispensable dans le cas où le travail sera effectué en repère local (petits chantiers ou chantiers isolés). L'Institut Géographique National (IGN) a donc implanté en France un réseau de points dits « géodésiques » (voir la carte figure 2.39. sur laquelle on distingue la triangulation du 1er ordre achevée en 1958).

La détermination des points géodésiques s'est faite par la méthode de triangulation, qui consiste à mesurer les angles et quelques côtés des triangles accolés dont les sommets sont les points géodésiques.

La résolution de ces triangles donne les positions relatives des sommets. Le problème étant d'implanter sur le territoire un ensemble plus ou moins dense de points, on procède par triangulations emboîtées ou ordres géodésiques hiérarchisés, respectant ainsi le principe « aller de l'ensemble au détail ». Cela permet d'assurer une précision homogène entre les différents ordres de réseaux.

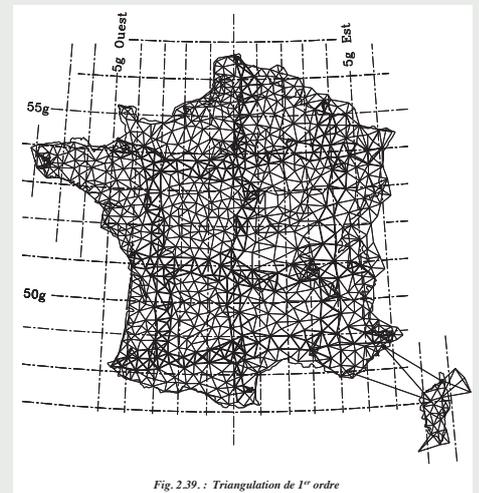


Fig. 2.39. : Triangulation de 1^{er} ordre

II.5.1 Historique de la triangulation

Le but initial de la triangulation consiste à connaître la forme et les dimensions de l'ellipsoïde terrestre, puis d'autres objectifs sont venus s'y ajouter ; ainsi elle a servi :

- d'ossature à la carte de France à petite échelle ;
- de base à l'établissement des plans cadastraux à moyenne échelle ;
- de canevas pour les plans à grande échelle établis pour les grands travaux ;
- aux besoins militaires.

L'évolution a imposé des plans à des échelles de plus en plus grandes et donc des canevas de plus en plus précis :

- en 1792, Méchain (1744–1804) et Delambre (1749–1822) ont mesuré l'arc de méridien de Dunkerque à Barcelone en vue de la détermination de l'unité de longueur. Cette chaîne méridienne fut le point de départ de la triangulation qui a servi de base à la carte d'état-major au 1/80 000 ;
- en 1873 débutent les travaux de la **Nouvelle Triangulation Française (NTF)**. Mais il n'a pas été possible d'utiliser les points de l'ancienne car la précision s'est avérée insuffisante, de nombreux points étant des pins, hêtres, rochers gravés, tours, d'une conservation douteuse. On a donc cherché à constituer plusieurs ordres de triangulation avec des visées suffisamment nombreuses situées dans les différents quadrants et de longueur homogène. Les points ont été matérialisés par des bornes d'importance plus ou moins grande selon l'ordre ;
- en 1991, année de la dernière campagne de géodésie classique de l'IGN, la NTF a été déclarée achevée : elle s'était régulièrement enrichie au fil des années par densification à partir du réseau de 1er ordre jusqu'à atteindre une densité d'un point pour 9 km² environ avec le 4e ordre. Ses 70 000 sites géodésiques (sans compter les points de 5e ordre) sont uniformément répartis sur le territoire national avec une précision relative moyenne de l'ordre de 10^{-5} (c'est-à-dire plusieurs centimètres au mieux par rapport au point le plus proche).
- le nouveau système géodésique RGF 93 est en préparation.

II.5.2 Matérialisation des points géodésiques

II.5.2.a Borne géodésique

Une borne est un bloc solide en granit dont la partie émergeant du sol est un cube de 15 cm d'arête. La face supérieure horizontale porte une croix gravée matérialisant le repère supérieur.

La borne repose sur une dalle. La borne et la dalle sont prises dans un bloc de béton. Sous celui-ci, séparé de lui par une couche de terre meuble, est coulé un bloc de béton dans lequel est ménagé un orifice circulaire au fond duquel se trouve un repère métallique inférieur recouvert de charbon de bois. La borne est placée de sorte que le repère supérieur et le repère inférieur soient à l'aplomb l'un de l'autre.

La profondeur de l'ensemble est environ 0,80 m, et le poids du bloc de granit est de l'ordre d'une tonne.

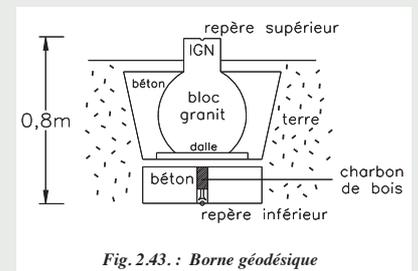


Fig. 2.A3. : Borne géodésique

II.5.2.b Mire géodésique

C'est un ensemble de panneaux de forme géométrique, en bois ou en métal, ayant un axe vertical centré au-dessus d'une borne ou d'un rivet (en montagne). Les mires géodésiques permettent l'observation éloignée de ces points. Les mires métalliques sont démontables. La hauteur des panneaux et la disposition des montants permettent de mettre un appareil en station sous la mire.

II.5.2.c Signal

Le signal est une construction ayant un axe de symétrie vertical situé au-dessus d'un repère et permettant l'observation éloignée de celui-ci. Le signal est en général géodésique : cheminée, pylône etc. ; il est souvent pérenne alors que les mires géodésiques sont provisoires. Par extension est englobé sous ce terme toute construction pouvant être observée : cheminées, pylônes, mires géodésiques, balises.

II.5.3 Répertoires de l'IGN

L'Institut géographique national publie pour chaque feuille au 1/50 000 un répertoire comprenant :

- une réduction de cette feuille sur format A4 avec l'emplacement de chaque point géodésique et son numéro d'ordre dans la feuille ;
- la fiche signalétique de chaque point : c'est un document d'archives et de diffusion qui contient :
- des renseignements d'ordre administratif : nom du point, nom et numéro de la feuille au 1/50 000, département, numéro de l'arrêté de servitude, renseignements cadastraux ;
- des renseignements d'ordre technique : désignation du type de borne et des repères auxiliaires, indication d'un point naturel connu pouvant servir d'orientation sur un point inconnu, situation topographique, plan des environs, croquis de repérage, nature et date de la mission et les coordonnées planimétriques X, Y (E, N) centimétriques.

L'altitude H est déterminée par nivellement indirect géodésique avec une précision décimétrique. Les fiches signalétiques sont stockées sur microfiches X, Y, Z vendues par l'IGN (une microfiche contient 60 points). Depuis Aujourd'hui, tous les points du RBF et de la NTF de 30 départements sont accessibles sur internet.

II.6 Réseau altimétrique

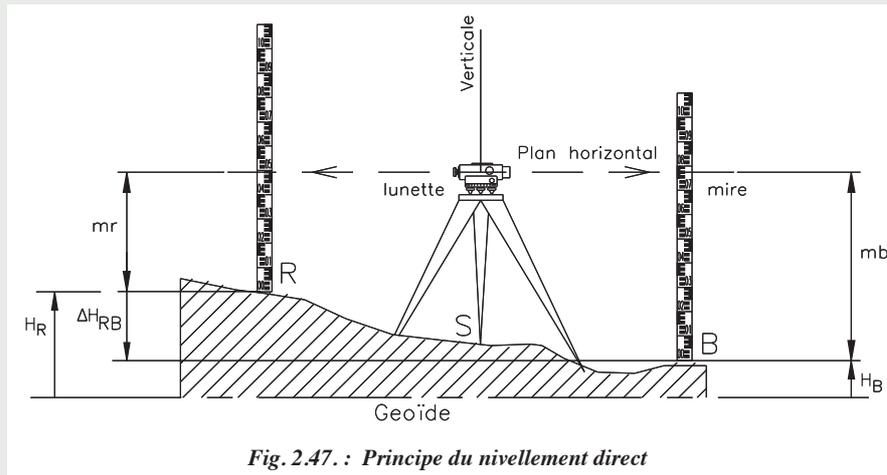


Fig. 2.47. : Principe du nivellement direct

Intuitivement, la différence d'altitude entre deux points sur une même verticale apparaît comme la distance séparant ces deux points sur cette verticale ; le principe des mesures de ces distances appelées dénivelées est le nivellement direct.

Une lunette appelée niveau décrit un plan horizontal en pivotant autour d'un axe vertical. Elle permet de lire les hauteurs m_r et m_b sur deux règles graduées appelées mires, positionnées successivement sur un repère R et un point B (fig. 2.47.).

La différence d'altitude $\Delta H_{RB} = H_B - H_R$ entre R et B est égale à $(m_r - m_b)$. Il est donc possible de déduire l'altitude de B si on connaît celle de R :

$$H_B = H_R(m_r - m_b)$$

Il en découle une définition de l'altitude d'un point : c'est la distance de ce point à la surface de niveau origine (géoïde défini précédemment) le long de la verticale physique passant par ce point. Or, le géoïde est quasiment le niveau moyen des mers. Il est donc impossible de faire toutes les mesures en partant chaque fois du bord de la mer. Il est donc nécessaire que des repères d'altitude soient répartis sur tout le territoire.

II.6.1 Surfaces de référence et altimétrie

Nous avons défini précédemment deux types de surfaces : **le géoïde et l'ellipsoïde**. Nous allons maintenant les définir à nouveau en nous intéressant au champ de pesanteur terrestre ; la seule orientation accessible partout à moindre coût est la direction de la verticale donnée par les nivelles des appareils de topométrie ou par le fil à plomb : c'est donc une référence obligée pour le topographe. Les verticales locales étant les directions de la pesanteur, on peut définir des surfaces perpendiculaires à ces directions ; ces surfaces sont des **équipotentiels du champ de pesanteur**. Ces surfaces sont donc de même niveau (la surface de niveau zéro étant le géoïde) ; une surface de niveau est telle qu'entre deux points, l'eau ne s'écoule pas.

En réalité, la pesanteur variant avec l'altitude et surtout la latitude (g augmente de l'équateur vers les pôles), les surfaces équipotentiels de la pesanteur **ne sont pas parallèles**. Ceci implique que deux points situés à la même hauteur au-dessus du géoïde ne sont pas forcément à la même altitude ou encore que deux points situés « au même niveau » (sur la même équipotentielle) ne seront pas à la même distance du géoïde, ce qui remet en cause la définition de l'altitude donnée ci-dessus.

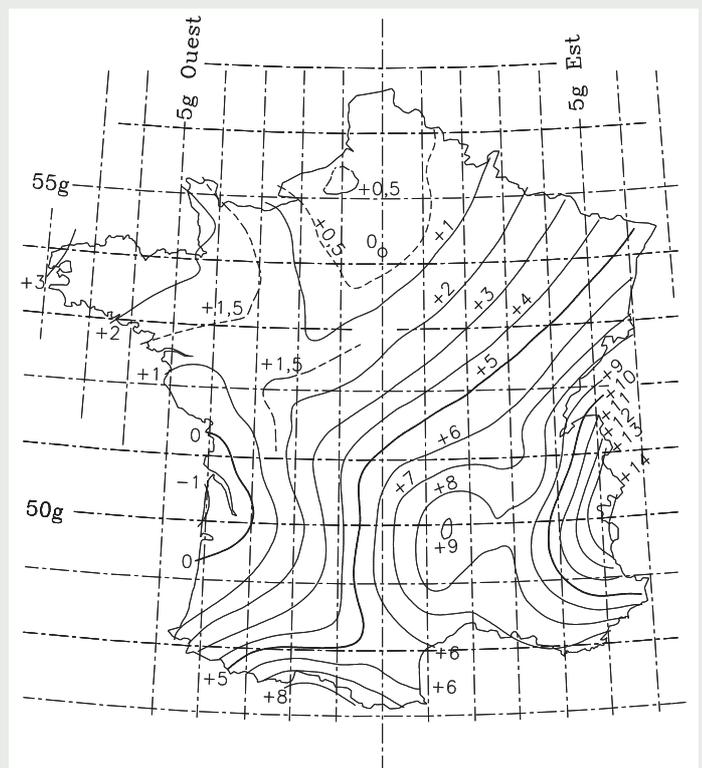


Fig. 2.49-a. : Cotes en mètres du géoïde par rapport à l'ellipsoïde Clarke 80

Si les océans n'étaient traversés d'aucun courant, s'ils étaient de densité constante et s'ils étaient au repos, leur surface décrirait une équipotentielle du champ de pesanteur (écoulement nul). Cette surface, proche du niveau moyen de la mer, a été prise pour origine des altitudes orthométriques : on l'appelle donc géoïde ; le géoïde, assez proche d'un ellipsoïde de révolution, présente par rapport à celui-ci des irrégularités n'excédant jamais 100 m (voir carte fig. 2.49-a.) ; on détermine donc l'ellipsoïde qui est le plus proche du géoïde et on privilégie cette surface puisqu'elle se décrit mathématiquement.

Il est donc facile de repérer tout point par rapport à sa position sur l'ellipsoïde par trois nombres, par exemple une longitude, une latitude et une hauteur. En France, l'ellipsoïde de Clarke est tangent au géoïde au point fondamental : le Panthéon à Paris.

Le géoïde est donc la surface de référence des altitudes, mais :

quoique proche du niveau de la mer, le géoïde en est toujours distinct puisque le niveau moyen des mers ne cesse de changer au cours du temps (mouvements de l'écorce terrestre, fonte des glaces polaires, etc.) ;

c'est une surface fictive et difficilement accessible à l'observation directe (on peut procéder à des mesures astrogéodésiques de déviations de la verticale locale par visées astronomiques au moyen d'une caméra zénithale) ;

elle ne représente pas une surface à accélération g constante.

Remarque: On écrit souvent la relation entre H (hauteur au-dessus du Géoïde ou altitude) et h (hauteur au-dessus de l'ellipsoïde) sous la forme $H = h - \Delta$ où Δ est la séparation du géoïde (sa hauteur au-dessus de l'ellipsoïde de Clarke, fig. 2.49-a.). Un modèle de géoïde est une base de données de valeurs de Δ pour des points connus dans le système Lambert.

II.6.2 Constitution du réseau actuel (IGN 69)

II.6.2.a Bref historique

La France a été couverte par trois nivellements successifs.

- d'abord le nivellement de Bourdaloue: conçu en une dizaine d'années, observé entre 1857 et 1864, il est constitué de 15 000 km de cheminements.
- le Nivellement Général de la France (NGF) de Lallemant, observé de 1884 à 1968.
- enfin, le Nivellement de Précision de la France NPF IGN 69, achevé depuis 1969 (1978 pour la Corse).

II.6.2.b Les repères de nivellement

Les altitudes des repères obtenues grâce à des travaux coûteux doivent être conservées avec le plus de sécurité possible. Les repères ont dû être placés sur des édifices publics : mairies, églises, gares, sur des ponts et, à défaut, sur des immeubles privés. Lorsqu'un repère disparaît, il est très facile de le rétablir à partir des points les plus proches. Les travaux sont moins importants que pour un point de triangulation.

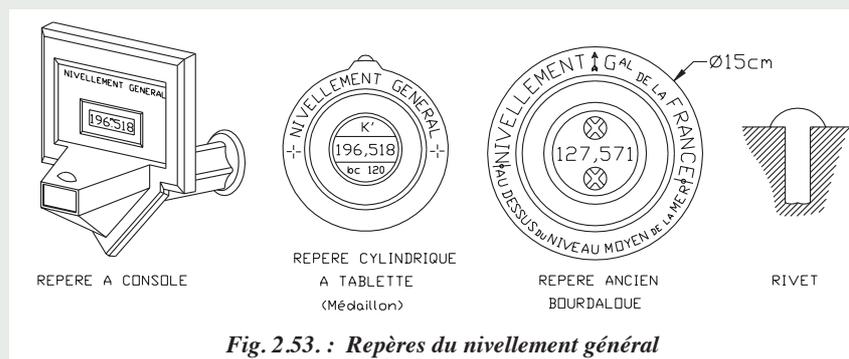


Fig. 2.53. : Repères du nivellement général

II.6.2.c Répertoires de nivellement

L'IGN publie un extrait de carte au 1/50 000 accompagné d'un calque superposable comportant le tracé des cheminements et l'indication des différents repères avec leur numéro ; puis sont fournis les répertoires de tous les points des 1^{er}, 2^e, 3^e et 4^e ordre. Sur la plupart des fiches des repères (celles établies avant 1969), les altitudes dites orthométriques sont rayées mais laissées lisibles ; elles sont encore utilisées car tous les nivellements établis avant 1969 sont rattachés à ce système d'altitude. Les nouvelles altitudes, dites normales, sont indiquées en dessous. La mention « altitude normale » est portée sur les fiches d'identification des repères de nivellement IGN 69.

III LES OUTILS MATHÉMATIQUES

III.1 Introduction

III.1.1 Les croquis

Un lever de terrain doit s'accompagner d'un croquis clair, précis et lisible par une autre personne que le dessinateur l'ayant réalisé. Cela demande habileté et habitude. Notez que certains géomètres arrivent de plus en plus à travailler sans croquis de terrain grâce à l'introduction d'une codification des points levés et enregistrés sur un carnet de terrain. L'effort d'apprentissage d'une codification est rapidement rentabilisé par le gain de temps lors de la phase d'habillage d'un lever de détails.

III.1.2 Le schéma général de calcul

Lors de calculs longs et fastidieux, il est très utile pour une éventuelle relecture ou correction de présenter un schéma général de calcul qui représente une sorte de table des matières de la note de calcul. L'ordre de présentation des calculs doit être l'ordre logique des résolutions numériques possibles. Cet ordre logique peut être issu de la construction géométrique.

III.1.3 La présentation des calculs

Pour être le plus lisible possible, une note de calcul doit utiliser une présentation en tableaux. Par exemple, le tableau suivant présente un calcul de distance entre des points donnés en coordonnées rectangulaires.

X_A (m)	Y_A (m)	X_B (m)	Y_B (m)	Delta X (m) $\Delta X = X_B - X_A$	Delta Y (m) $\Delta Y = Y_B - Y_A$	Distance AB (m) $D = (\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{1/2}$
13,32	15,46	45,47	46,65	32,15	31,19	44,79
12,32	09,45	54,42	48,63	42,10	39,18	57,51

III.1.4 La présentation des résultats

Une note de calcul dans laquelle les résultats intermédiaires importants sont encadrés et dans laquelle on fait usage de couleurs est plus facile à suivre et à relire. On prendra soin, par exemple, d'utiliser dans les schémas des couleurs correspondant à celles du texte de la note de calcul.

III.1.5 La précision des résultats

Les résultats ne peuvent être plus précis que les données. En effet, si vous connaissez deux points en coordonnées au centimètre près, vous ne pourrez pas donner la distance entre ces points au millimètre près : c'est même une faute de raisonnement. Pour obtenir une précision donnée sur les résultats, deux cas de figure sont possibles :

- si vous effectuez une résolution graphique au moyen d'un logiciel de DAO ou si vous utilisez un logiciel de calcul, il suffit d'arrondir les résultats donnés ;
- si vous utilisez une calculatrice, pour éviter la perte de précision finale par cumul d'arrondis, il convient de garder au moins une décimale de plus dans les calculs. Certains calculs peuvent même demander de garder beaucoup plus de décimales dans les calculs intermédiaires : par exemple, un calcul faisant intervenir des puissances. La solution à ce problème est de stocker les valeurs intermédiaires dans les mémoires de la calculatrice (toute calculatrice moderne le permet) et de rappeler le contenu de ces mémoires pour des calculs ultérieurs. Si la calculatrice ne possède pas cette possibilité, vous avez toujours la solution de noter au crayon un maximum de décimales derrière les décimales suffisantes et de les effacer une fois le calcul terminé.

III.1.6 Les contrôles

Le contrôle des mesures doit être la philosophie de base du géomètre topographe ; il consiste par exemple :

- à doubler les mesures sur le terrain pour permettre des recoupements,
- à vérifier les calculs faits par des constatations faisant appel à la logique ou bien par d'autres calculs ; même s'ils sortent d'un listing d'ordinateur, ces calculs peuvent donner des valeurs fausses ayant pour causes essentielles des erreurs humaines ;
- le dessin à l'échelle est aussi un excellent contrôle.

Dans des calculs menant à des résultats littéraux, le contrôle de l'homogénéité des formules est indispensable.

III.1.7 Les constructions géométriques

Autrefois, elles constituaient une vérification approximative des calculs pour éviter les erreurs grossières. Puis, l'emploi de calculatrices de plus en plus performantes a eu tendance à dévaloriser les résolutions graphiques. Aujourd'hui, le rôle des constructions graphiques est essentiel puisque depuis l'avènement du Dessin Assisté par Ordinateur, elles permettent de résoudre les problèmes de manière visuelle avec, au minimum, la même précision que l'on obtiendrait sur une calculatrice. En effet, un ordinateur moyen actuel calcule avec une précision de 16 chiffres après la virgule et ce qu'il dessine à l'écran n'est que la visualisation graphique des calculs internes à la machine.

C'est pourquoi, dans cet ouvrage, il est fait une grande place aux résolutions graphiques qui sont un moyen de calcul de l'avenir, même si tout ne peut être calculé graphiquement. Il est conseillé d'apprendre l'utilisation d'un logiciel de DAO pour mesurer toute la puissance de ce moyen de calcul qui présente le double avantage de limiter les erreurs possibles en permettant de visualiser directement le problème et, enfin, de fournir directement le report sur papier à toute échelle du problème traité.

III.1.8 L'informatique

L'informatique est un outil exceptionnel pour le topographe moderne : il faut absolument apprendre à le maîtriser. Mais attention : l'ordinateur n'est qu'un outil et ne fait donc que ce qu'on lui demande ; il vous appartient de rester critique devant ses résultats et devant ses possibilités. En effet, certains calculs ou reports peuvent être obtenus plus rapidement à la main ; seules les opérations répétitives ou fastidieuses donnent tout son sens à l'utilisation de l'outil informatique.

III.2 Les angles

III.2.1 Le radian (rad)

C'est l'**angle au centre interceptant sur le cercle un arc de longueur égale à son rayon** (fig. 5.65.). Un angle de α rad intercepte donc une longueur de $R \cdot \alpha$ sur le cercle. Le **périmètre** d'un cercle de rayon R est égal à $2 \cdot \pi \cdot R$. La constante π peut être calculée ainsi : $\tan(\pi / 4) = 1$ d'où $\pi = 4 \cdot \arctan(1) = 3,14159\dots$

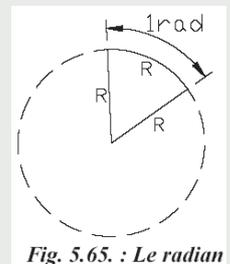


Fig. 5.65. : Le radian

III.2.2 Le degré (deg ou °)

C'est la **360e partie du cercle**. Il est généralement exprimé en degrés décimaux ($121,636^\circ$). On peut aussi l'exprimer en degrés sexagésimaux dont les sous-multiples sont :

- la **minute sexagésimale** : 1' vaut $1/60^\circ$
- la **seconde sexagésimale** : 1" vaut $1/60e$ de minute soit $1 / 3\ 600^\circ$

III.2.3 Le grade (gon)

Le terme « grade » représente l'unité, « **gon** » est sa notation ; c'est par définition la **400e partie du cercle**. C'est l'unité usuelle du topographe. On utilise aussi souvent les sous-multiples du grade, à savoir : décigrade (dgon), centigrade (cgon), milligrade (mgon), décimilligrade (dmgon). Un cgon est aussi une **minute centésimale** ($1/100e$ de grade), notée [c]. Un dmgon est aussi une **seconde centésimale** ($1/10\ 000e$ de grade), notée [m].

III.3 Les triangles

III.3.1 Définitions

Un triangle ABC est toujours convexe. Il possède 3 sommets, 3 cotés et 3 angles. Les cotés et les angles sont les 6 éléments du triangle. Le coté BC est dit opposé à l'angle A et adjacent à chacun des angles B et C. Un triangle est isocèle s'il a 2 cotés égaux, équilatéral si ses trois cotés sont égaux et rectangle s'il a un angle droit.

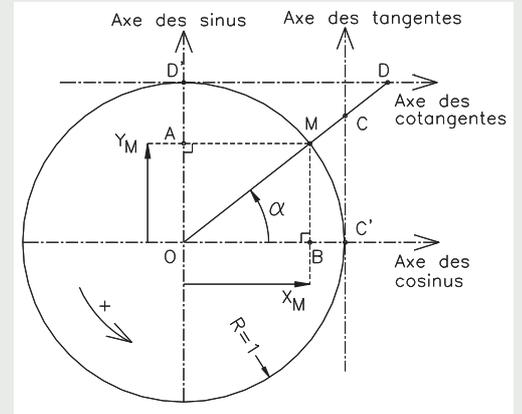
III.3.2 Droites concourantes dans un triangle

On appelle hauteur la perpendiculaire menée d'un sommet sur le côté opposé. On appelle médiane le segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé. Une médiatrice est la perpendiculaire au milieu d'un des cotés. Une bissectrice partage un angle en deux angles égaux.

- **Médiatrices:** Le point de concordance des médiatrices est équidistant des 3 sommets. C'est le centre du cercle circonscrit.
- **Hauteurs:** Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes et le point commun de ces trois hauteurs est l'orthocentre.
- **Médianes:** Les trois médianes d'un triangle se coupent en un point situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté correspondant, et appelé centre de gravité.
- **Bissectrices:** Le point de concours des bissectrices est équidistant des 3 côtés du triangle, il se nomme centre du cercle circonscrit.

III.3.3 Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est de rayon 1, c'est-à-dire : $R = OM = 1$. En mathématique, le sens de rotation positif est dit trigonométrique et correspond au sens de rotation inverse horaire. Les angles sont exprimés en radians. Par définition, le cosinus de l'angle α est la projection sur l'axe des abscisses x de l'extrémité du vecteur, le sinus étant la projection sur l'axe des ordonnées y : $\cos \alpha = XM$, et $\sin \alpha = YM$. On définit ensuite : $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$.



Utilisation en topographie: Ces relations servent à calculer les éléments d'un triangle rectangle, par exemple le triangle OMA ou le triangle OMB dont on connaît au moins deux données : une longueur et un angle, ou bien deux longueurs. La connaissance de deux angles est insuffisante car il y a alors une infinité de solutions.

III.3.4 Relations dans les triangles quelconques

III.3.4.a Relations de base

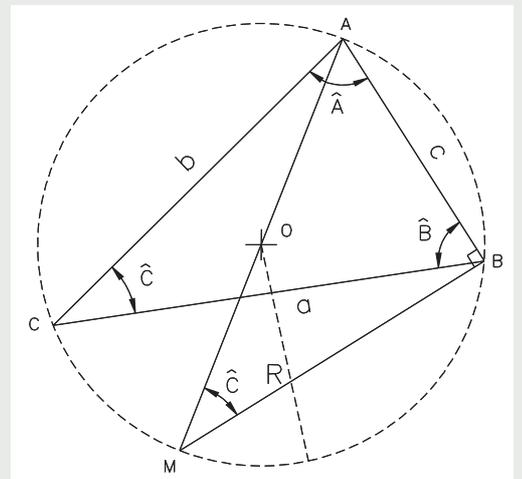
La notation utilisée est celle représentée sur le schéma ci-contre :

- **Somme des angles Internes**

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 200 \text{ gon}$$

- **Relation des sinus**

Le cercle de rayon R est appelé cercle circonscrit au triangle ABC et le triangle ABC est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R. Si l'on fait intervenir le triangle ABM tel que la droite AM passe par le centre O du cercle, on retrouve en M l'angle C puisque les angles ACB et ABM interceptent la même corde AB (Théorie des arcs capables).



De plus, l'angle ABM est égal à 100 gon car le triangle ABM inscrit dans un cercle dont le côté AM est un diamètre du cercle, est un triangle rectangle en B.

Donc dans le triangle rectangle ABM, on a :

$$\sin \widehat{C} = \frac{c}{2R}$$

Cette relation peut se démontrer pour chaque côté du triangle et comme la quantité 2R est une constante, on en déduit la relation des sinus exprimée ci-dessous :

$$2R = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

- Relation des cosinus

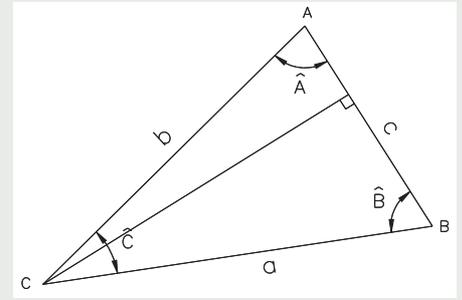
Dans le même triangle ABC, si l'on trace la perpendiculaire à AB passant par C (hauteur), on peut écrire :

$$c = a \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{A}$$

De même, sur les autres côtés, on obtient :

$$b = c \cdot \cos \hat{A} + a \cdot \cos \hat{C}$$

$$a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$



- Théorème de Pythagore généralisé

Dans le triangle ABC, on peut écrire la relation vectorielle suivante :

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

Si l'on en fait le produit scalaire membre à membre, on obtient :

$$\vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC})$$

En distribuant, il vient :

$$AC^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + BC^2$$

En écrivant le produit scalaire, il vient :

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC}) = AB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \hat{B}) = -AB \cdot BC \cdot \cos \hat{B}$$

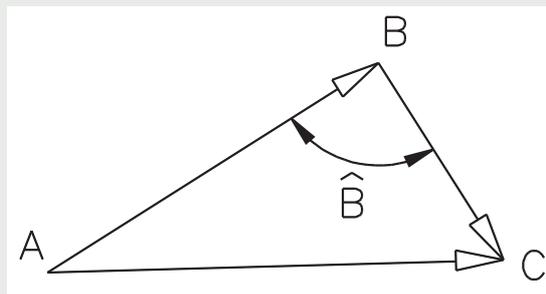
On obtient finalement :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

On démontre de même que :

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos \hat{C}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos \hat{A}$$



III.3.4.b Surface d'un triangle

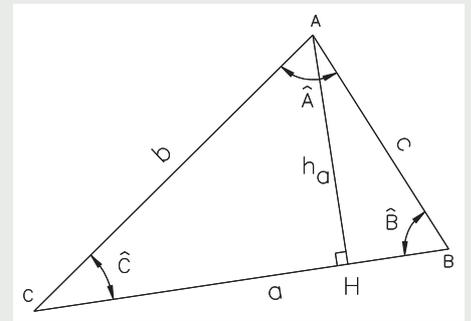
- Surface d'un triangle à partir de la hauteur du triangle

La surface totale S du triangle ABC est la somme des surfaces des triangles AHC et AHB . Soit :

$$S = \frac{h_a \cdot CH}{2} + \frac{h_a \cdot BH}{2}$$

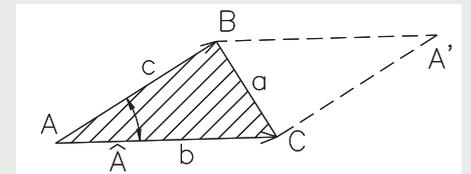
$$S = \frac{h_a}{2}(CH + BH)$$

Donc : $S = \frac{ah_a}{2}$



- Surface d'un triangle à partir du produit vectoriel

C'est la formule la plus employée. La surface du parallélogramme $A-B-A'-C$ s'exprime comme la norme du produit vectoriel des vecteurs AB et AC . La surface totale du parallélogramme est :



$$S_t = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

Donc :

$$S_t = b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$$

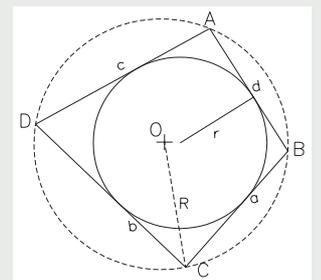
La surface S du triangle ABC est la moitié de la surface totale :

$$S = \frac{bc \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{ab \cdot \sin \hat{C}}{2} = \frac{ac \cdot \sin \hat{B}}{2}$$

III.4 Extensions de certaines formules aux polygones

- Surface d'un QUADRILATÈRE

La surface du quadrilatère $ABCD$ ci-contre, inscrit dans un cercle de rayon R et circonscrit à un cercle de rayon r , s'exprime par :



$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$S = pr$$

avec : $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

- Somme des angles internes d'un polygone

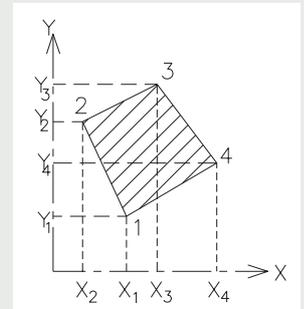
La somme des angles internes d'un polygone de n côtés vérifie la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = (n-2) \cdot 200 \text{ gon}$$

III.5 Surface d'un polygone quelconque

III.5.1 Les sommets sont connus en coordonnées cartésiennes x,y

Soit un polygone de n sommets dont chacun est connu par ses coordonnées rectangulaires (Xi ; Yi). La figure ci-contre présente un exemple avec n = 4. La surface de ce polygone s'exprime de deux manières équivalentes :



$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} X_i(Y_{i-1} - Y_{i+1})$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Y_i(X_{i-1} - X_{i+1})$$

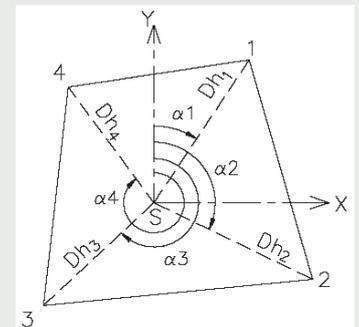
Remarques :

- Si la surface S est positive, alors la surface S' est négative et inversement. On doit donc toujours vérifier que S' + S = 0.
- Lors de la rotation des indices i, on applique la convention suivante : X0 = Xn ; Y0 = Yn ; Xn+1 = X1 ; Yn+1 = Y1.

Cela revient à considérer les sommets comme étant sur une boucle décrite en tournant autour de la surface ; le sommet 1 est alors le suivant du sommet n et, par conséquent, le sommet n est le précédent du sommet 1.

III.5.2 Les sommets sont connus en coordonnées polaires

Un appareil du type théodolite stationné au point S permet d'effectuer les lectures des angles ai sur les sommets du polygone. Si on mesure ensuite (par exemple au ruban) la distance horizontale du point S à chacun des sommets, on connaît ces sommets en coordonnées polaires topographiques (Dh , a) dans le repère (S, X, Y), l'axe des ordonnées Y étant la position du zéro du cercle horizontal du théodolite.



Attention : ces coordonnées polaires sont particulières à la topographie puisque le zéro des angles est placé sur l'axe des ordonnées Y et leur sens de rotation est horaire. Les coordonnées polaires mathématiques placent le zéro des angles sur l'axe des abscisses X avec des angles tournant positivement en sens trigonométrique (ou anti-horaire).

On découpe la surface totale du polygone de n côtés en n triangles partant tous du sommet S. On peut en déduire la surface en projection horizontale d'un polygone de n côtés par la formule suivante :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \cdot Dh_{i+1} \cdot \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

Remarques

- Par convention $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ et $Dh_{n+1} = Dh_1$; le sommet 1 est le sommet suivant le sommet n.
- La surface du triangle (1S4) de l'exemple de la figure 5.34. fait intervenir l'angle ($\alpha_1 - \alpha_4$) qui est négatif. Pour obtenir sa valeur dans le tableau, il suffit de lui ajouter 400 gon. Ceci n'est pas nécessaire dans le calcul puisque le sinus ne change ni de valeur ni de signe : $\sin a = \sin(400 + a)$.
- Si la station S est située à l'extérieur du polygone, la formule est également applicable. Il apparaît alors dans le calcul des surfaces négatives dont il faut conserver le signe dans la somme de la formule générale.

III.5.3 Formules complémentaires

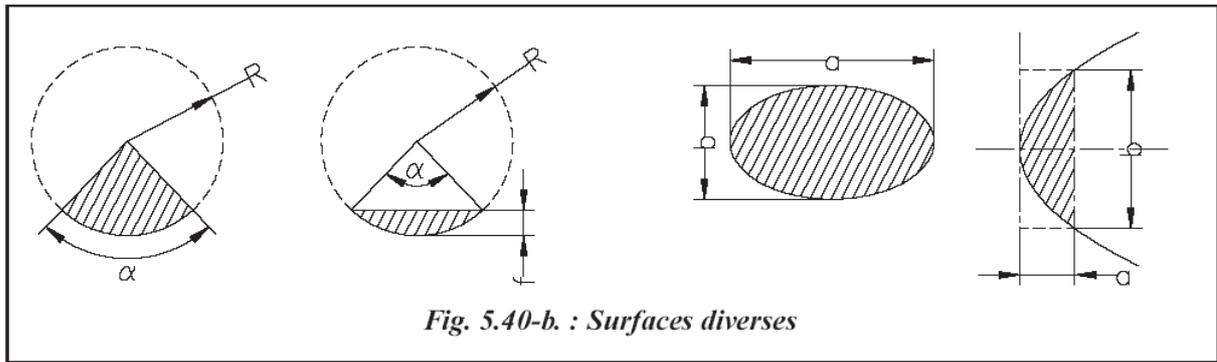


Fig. 5.40-b. : Surfaces diverses

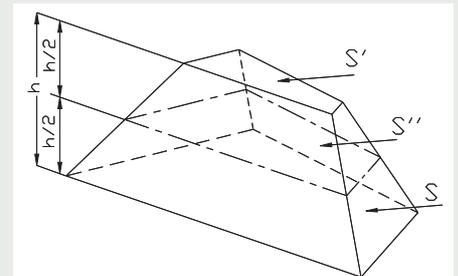
Secteur circulaire	Segment circulaire	Ellipse	Segment parabolique
$S = \pi R^2 \frac{\alpha_{gon}}{400}$	$S = \pi R^2 \frac{\alpha_{gon}}{400} - R^2 \frac{\sin \alpha}{2}$ $f = R \cdot [1 - \cos(\alpha / 2)]$	$S = \frac{\pi ab}{4}$	$S = \frac{2}{3} ab$

III.6 Volumes

III.6.1 Formules des trois niveaux

Cette formule permet de calculer la plupart des volumes complexes (tronc de pyramide, tronc de cônes, segments sphériques, tas de sable, etc.). Soit le volume ci-contre tel que :

- les surfaces S, S' et S'' sont parallèles entre elles ;
- les surfaces extrêmes S et S' sont distantes de la valeur h hauteur du volume ;
- la surface S'' est située à la demi-hauteur h/2.

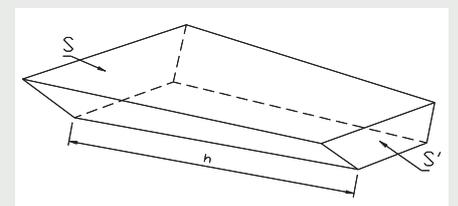


Le volume total vaut alors :

$$V = \frac{h}{6}(S + S' + 4S'')$$

III.6.2 Formule de la moyenne des bases

Dans le cadre de calculs de cubatures pour des mouvements de terre, il n'est pas utile d'effectuer un calcul exact des volumes de terre, les quantités de terre déplacées et les incertitudes sur les dimensions réelles des excavations et sur la connaissance du terrain naturel sont telles qu'il suffit d'un calcul approché pour rester dans la même marge d'erreur. On emploie alors la méthode de calcul suivante : on considère que le volume V est égal au produit de la demi-somme des surfaces qui le limitent (S+S')/2 par la distance h qui les sépare.

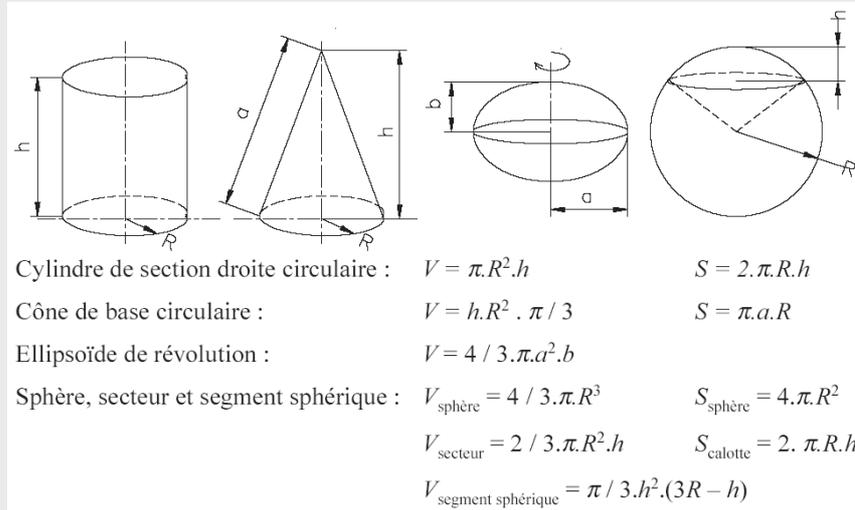


$$V = h \frac{S' + S}{2}$$

III.6.3 Calcul exact par décomposition en volumes élémentaires

Le volume à décomposer doit être délimité par des surfaces planes régulières (surfaces non gauches). Les volumes de base sont :

- la pyramide de surface de base S de volume $V = S \cdot h / 3$
- le tronc de prisme de section droite triangulaire S de volume $V = S \cdot (h_1 + h_2 + h_3) / 3$
- le tronc de prisme dont la section droite est un parallélogramme de volume : $V = S \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) / 4$



III.7 Système de coordonnées rectangulaires et polaires

III.7.1 Transformation de coordonnées d'un système a l'autre

III.7.1.a Coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires mathématiques

Le point M (fig. 5.50.) est repéré par ses coordonnées cartésiennes (ou rectangulaires) : M (X_M,Y_M). Les coordonnées polaires mathématiques sont, dans l'ordre, le rayon polaire r et l'angle polaire α : M(r,α). En convention polaire mathématique, les angles tournent positivement en sens trigonométrique (inverse horaire) ; leur zéro est sur l'axe des abscisses et ils sont généralement exprimés en radians, unité du système international.

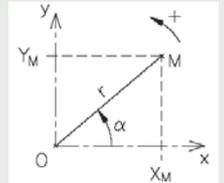


Fig. 5.50. : Coordonnées cartésiennes et polaires

Les formules de transformation sont les suivantes :

$$r = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{Y_M}{X_M}$$

Les formules de transformation inverse sont :

$$X_M = r \cdot \cos \alpha$$

$$Y_M = r \cdot \sin \alpha$$

III.7.1.b Coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires topographiques

Le point M (fig. 5.51.) est repéré par ses coordonnées cartésiennes (ou rectangulaires) : M (X_M,Y_M). Les coordonnées polaires topographiques sont la distance horizontale Dh et le gisement G : M(Dh,G). En convention polaire topographique, les angles tournent positivement en sens horaire ; leur zéro est sur l'axe des ordonnées et ils sont toujours exprimés en grades (symbole gon) ; cela vient des choix technologiques sur les appareils de topométrie.

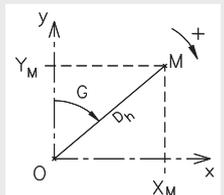


Fig. 5.51. : Coordonnées polaires topographiques

Les formules de transformation sont les suivantes :

$$Dh = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2}$$

$$\tan G = \frac{X_M}{Y_M}$$

Les formules de transformation inverse sont :

$$X_M = Dh \cdot \sin G$$

$$Y_M = Dh \cdot \cos G$$

III.7.2 Changement de repère

III.7.2.a Translation de repère

Soit un point M dont les coordonnées (X_M, Y_M) sont connues dans un repère $R(O, x, y)$ (fig. 5.52.). On veut connaître les nouvelles coordonnées de M dans le repère $R'(O', x', y')$ déduit de $R(O, x, y)$ par translation de vecteur de coordonnées $(X_{O'}, Y_{O'})$, qui sont les coordonnées de la nouvelle origine O' dans l'ancien repère $R(O, x, y)$. Les nouvelles coordonnées de M dans $R'(O', x', y')$ sont :

$$M \quad \begin{cases} X'_M = X_M - X_{O'} \\ Y'_M = Y_M - Y_{O'} \end{cases}$$

III.7.2.b Rotation de repère

Soit un point M dont les coordonnées (X_M, Y_M) sont connues dans un repère $R(O, x, y)$ (fig. 5.53.) On veut connaître les nouvelles coordonnées de M (X'_M, Y'_M) dans le repère $R'(O, x', y')$ déduit de $R(O, x, y)$ par rotation d'angle α . Les nouvelles coordonnées de M dans $R'(O, x', y')$ sont :

$$M \quad \begin{cases} X'_M = X_M \cdot \cos\alpha + Y_M \cdot \sin\alpha \\ Y'_M = -X_M \cdot \sin\alpha + Y_M \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

III.7.2.c Translation puis rotation

Le résultat du calcul dépend de l'ordre dans lequel sont effectuées les transformations. L'ordre correct dépend du repère dans lequel est exprimé le vecteur de translation. Un mauvais choix peut amener à une erreur. En effet, si l'on commence par la rotation pour passer de $R(O, x, y)$ à $R(O, x'', y'')$, au moment d'effectuer la translation pour passer au repère $R(O', x''', y''')$, il faut que le vecteur de translation soit donné dans le repère intermédiaire $R(O, x'', y'')$ qui a subi une première rotation. Si l'on commence par la translation, ce problème ne se pose pas puisque le vecteur de translation est exprimé dans le repère de départ dans lequel on effectue cette translation $R(O, x, y)$.

$$M \quad \begin{cases} X'''_M = (X_M - X_{O'}) \cdot \cos\alpha + (Y_M - Y_{O'}) \cdot \sin\alpha \\ Y'''_M = -(X_M - X_{O'}) \cdot \sin\alpha + (Y_M - Y_{O'}) \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

III.7.2.d Rotation puis translation

En topographie, ce problème se pose généralement lorsque l'on souhaite passer d'un repère local (O', x', y') à un repère général (O, X, Y) (fig. 5.56.) : le point M (X'_M, Y'_M) est connu en repère local et on veut obtenir ses coordonnées (X_M, Y_M) en repère général. On connaît les coordonnées dans le repère général de l'origine $O'(X_{O'}, Y_{O'})$ du repère local ainsi que le gisement G de l'axe des ordonnées du repère local dans le repère général. Dans un premier temps, on effectue une rotation de repère d'angle $G = -\alpha$. Puis on effectue une translation de vecteur $O'O$ connu dans le repère (O, X, Y) , donc :

$$M \quad \begin{cases} X_M = X_{O'} + x'_M \cdot \cos G - y'_M \cdot \sin G \\ Y_M = Y_{O'} + x'_M \cdot \sin G + y'_M \cdot \cos G \end{cases}$$

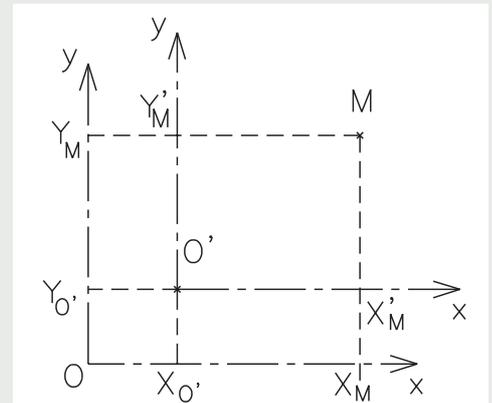


Fig. 5.52. : Translation de repère

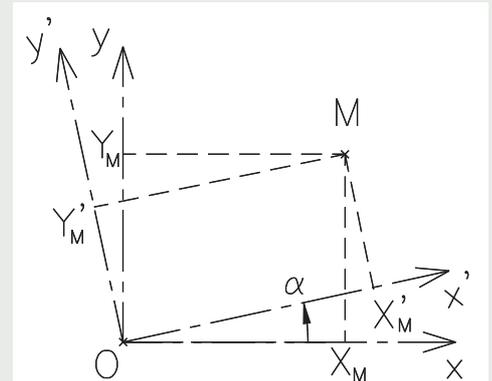


Fig. 5.53. : Rotation de repère

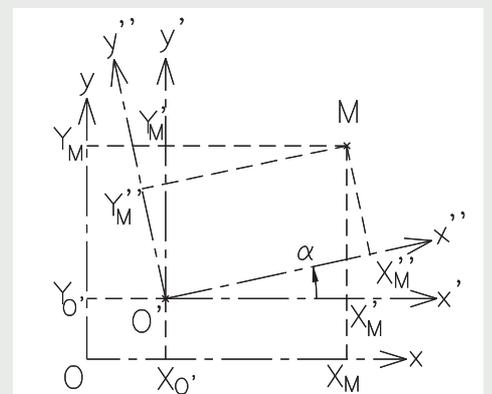


Fig. 5.55. : Changement de repère

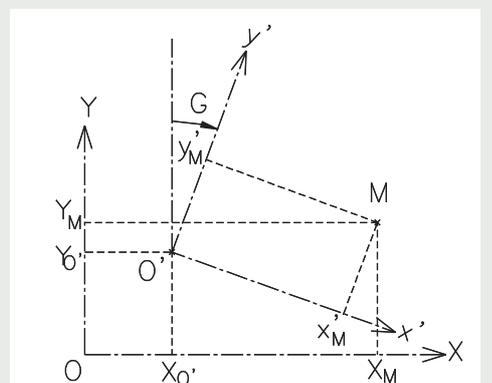


Fig. 5.56. : Changement de repère

III.7.3 Calcul de gisement

Le gisement est un angle horizontal très utilisé par les topographes puisque très pratique dans les calculs.

III.7.3.a Définition

Le gisement d'une direction AB est l'angle horizontal mesuré positivement dans le sens horaire entre l'axe des ordonnées du système de projection utilisé et cette direction AB (fig. 3.26). On le note G_{AB} (ou aussi V_{AB}). Mathématiquement, c'est l'angle positif en sens horaire entre l'axe des ordonnées du repère et le vecteur. G est compris entre 0 et 400 gon. Par exemple (fig. 3.26) : G_{AB} est l'angle entre le Nord (ordonnées) et la direction AB. G_{BA} est l'angle entre le Nord et la direction BA. La relation qui lie G_{AB} et G_{BA} est :

$$G_{BA} = G_{AB} + 200$$

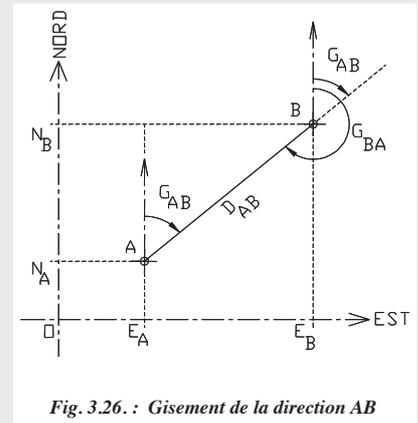


Fig. 3.26. : Gisement de la direction AB

III.7.3.b Calcul d'un gisement à partir des coordonnées cartésiennes

Considérons les coordonnées de deux points A(E_A, N_A) et B(E_B, N_B) (voir fig. 3.26). La relation suivante permet de calculer :

$$\tan G_{AB} = \frac{E_B - E_A}{N_B - N_A}$$

Remarque: Pour obtenir la valeur de G , il faut utiliser la fonction $\tan^{-1}()$ ou inverse tangente. Rappelons que pour l'équation $G = \tan^{-1} K$, une calculatrice ne donne qu'une solution ($-100 < G < 100$ gon) alors qu'il existe plusieurs antécédents possibles. En effet, $\tan G = \tan(200 + G) = \tan(G - 200)$. La calculatrice ne donne donc pas forcément le bon angle G correspondant au problème.

III.7.3.c Utilisation du gisement pour les calculs de coordonnées

En topographie, il est très fréquent de connaître un point S (E_S, N_S) et de chercher les coordonnées d'un point P visible depuis S. On dit que P est rayonné depuis S si l'on peut mesurer la distance horizontale D_{SP} et le gisement G_{SP} (fig. 3.29). Quel que soit le quadrant, on peut alors calculer les coordonnées du point P par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} E_P &= E_S + D_{SP} \cdot \sin G_{SP} \\ N_P &= N_S + D_{SP} \cdot \cos G_{SP} \end{aligned}$$

A défaut de mesurer directement G_{SP} , on mesure un angle α avec une direction dont le gisement est connu ou bien on calcule un G_0 moyen de station.

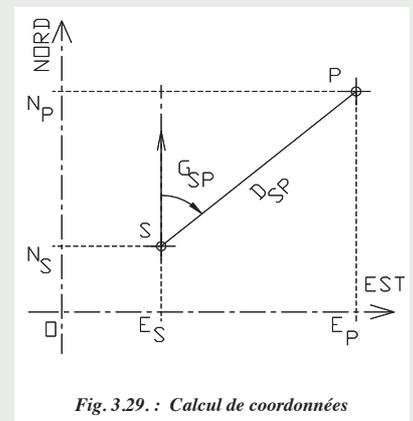


Fig. 3.29. : Calcul de coordonnées

III.8 La théorie des erreurs

III.8.1 Mesures topométriques

La topographie exige l'observation de nombreuses mesures. Considérons la distance entre deux points parfaitement et très précisément définis : cette distance est unique et n'a qu'une valeur nommée valeur vraie. C'est une valeur utopique qu'il est impossible de connaître. Si nous mesurons plusieurs fois cette distance, nous obtenons des résultats de mesurage non tous identiques ; ces valeurs seront des valeurs approchées de la valeur vraie et celle que l'on retiendra, dans ce cas la moyenne arithmétique, sera nommée la valeur conventionnellement vraie de la distance.

Les mesures donnent des valeurs non toutes identiques parce que :

- les observations sont effectuées par des personnes et non des robots : les gestes et manipulations ne sont donc pas à chaque fois absolument identiques ;
- les conditions des observations changent : les variations de températures modifient la longueur d'une chaîne en acier, les différences de pression atmosphérique perturbent les ondes des distance-mètres, etc. ;
- les instruments, aussi précis soient-ils, de conception et de fabrication humaine, sont forcément entachés d'erreurs : non perpendicularité des axes d'un théodolite, défauts dans les graduations du limbe, défaut d'horizontalité de l'axe optique d'un niveau, etc.

L'analyse de ces erreurs permet de se rendre compte que :

- certaines sont **systématiques** car inévitables (celles citées en 2 et 3 par exemple) ; en fait, on peut les connaître et souvent les éliminer par des procédés de mesurage ou tout simplement en les évaluant ;
- d'autres, en revanche, sont **aléatoires** ; on dit qu'elles sont accidentelles (celles citées en 1) : elles dépendent essentiellement des opérateurs.

Le problème du topomètre est donc de tenir compte de ces erreurs dans le résultat définitif de la grandeur mesurée et de définir jusqu'à quelles valeurs ces erreurs sont admissibles. Il faut aussi combiner les erreurs commises sur les grandeurs mesurées (mesures directes) lorsque la grandeur cherchée est fonction de ces mesures. Dans un premier temps, donnons la définition de certains termes normalisés par la norme AFNOR NF X 07-00 :

- le **mesurage** est l'ensemble des opérations expérimentales ayant pour but de déterminer la valeur d'une grandeur. En topométrie, on utilise souvent le terme de mesure.
- la **méthode de mesurage** est le mode de comparaison utilisé. On distingue :
 - le **mesurage direct**, comparaison de la grandeur avec un étalon : par exemple mesurer une longueur avec un décimètre ou un angle avec un théodolite ;
 - le **mesurage indirect**, qui fournit le résultat de la grandeur par l'intermédiaire d'une formule faisant intervenir des mesures directes : par exemple la mesure de la surface d'un rectangle faisant intervenir la mesure de ses côtés ou encore la mesure d'une altitude en nivellement indirect faisant intervenir au moins une mesure de distance et une mesure angulaire.
- la **valeur vraie** d'une grandeur est la valeur qui caractérise une grandeur parfaitement définie : c'est une notion idéale qui ne peut généralement être connue.
- la **valeur conventionnellement vraie** d'une grandeur est la valeur approchée de la valeur vraie d'une grandeur ; la différence entre ces deux valeurs peut être négligée.
- l'**erreur de mesurage** est la discordance entre le résultat du mesurage et la valeur, que celle-ci soit vraie, conventionnellement vraie ou encore qu'elle soit la moyenne arithmétique d'une série de mesurages. Elle résulte des erreurs instrumentales, des erreurs d'observations commises par l'opérateur ainsi que des conditions d'observation : température, pression atmosphérique, humidité de l'air par exemple.
- les **fautes ou erreurs parasites** sont les erreurs grossières, non admissibles, qui résultent d'une exécution incorrecte du mesurage.

III.8.2 Les erreurs en topométrie

Les observations effectuées dans les opérations topographiques sont entachées d'inexactitudes plus ou moins importantes provenant de l'imperfection des sens, des instruments utilisés, des conditions atmosphériques, etc. En améliorant les méthodes et les instruments, en répétant plusieurs fois les observations, les erreurs seront réduites, mais la valeur mathématiquement exacte ne sera jamais atteinte. Les inexactitudes sont de deux natures différentes : les fautes et les erreurs.

III.8.2.a Fautes ou erreurs parasites

Ce sont des inexactitudes grossières qui proviennent de la maladresse des opérateurs et de leurs aides ainsi que de leurs négligences ; elles sont en général facilement décelables : faute de lecture sur un ruban, faute de lecture d'angle, faute de lecture sur la mire, etc. Il s'agit d'une faute lorsque la tolérance donnée pour les observations ou l'approximation donnée pour un instrument est dépassée. Il faut se prémunir contre les fautes toujours possibles en se réservant un certain nombre de contrôles, par exemple, une longueur doit être mesurée au moins deux fois, à l'aller puis au retour, des répétitions sur la mesure des angles seront effectuées, etc.

III.8.2.b Les erreurs

Ces inexactitudes sont absolument inévitables. Elles proviennent de l'imperfection des instruments utilisés, de l'imperfection des sens de l'individu. Leur valeur est faible par rapport aux fautes et de toute façon obligatoirement inférieure à la tolérance. Mais quoique petite, la somme de ces erreurs donne aux résultats une inexactitude dont il est recommandé de se préoccuper. Par exemple, une distance est mesurée à l'aide d'une chaîne comportant une erreur d'étalonnage ; cette erreur se reproduit à chaque portée avec la même valeur et le même signe. Une telle erreur est dite systématique : on peut la connaître en valeur et en signe. Supposons enfin que cette longueur soit chaînée sans prendre soin de s'aligner à chaque portée : on commet à chaque portée une erreur qui, quoique conservant le même signe, n'a pas la même valeur ; supposons enfin que, toujours pour déterminer cette même longueur, à l'extrémité de chaque portée les repères au sol n'aient pas été faits parfaitement en coïncidence avec la graduation de la chaîne, parfois avant, parfois après ; cette erreur, dite de tracé, se reproduit tantôt positive, tantôt négative. De telles erreurs sont dites accidentelles ; elles ne peuvent être quantifiées.

III.8.2.b.1 Les erreurs systématiques

Ces erreurs se reproduisent toujours identiquement à elles-mêmes. Elles sont dues à une cause permanente connue ou inconnue. Il est toujours possible de la corriger soit par le calcul (par exemple la correction d'étalonnage d'un ruban) soit par un mode opératoire (par exemple le double retournement). Les mesures topométriques consistent essentiellement en mesures de longueurs et en mesures d'angles. Nous allons rappeler ci-après quelques erreurs systématiques caractéristiques de ces types de mesures.

- Pour les **mesures de longueurs**

- par chaînage, les erreurs systématiques sont essentiellement des erreurs d'étalonnage et, pour les éliminer, il faut apporter aux valeurs observées des corrections d'étalonnage ; ces corrections sont multiples : tensions, température, étalonnage proprement dit. C'est aussi l'erreur de chaînette, d'alignement et le défaut d'horizontalité
- par des IMEL (instruments de mesures électroniques des distances) : par exemple les distancemètres. Les erreurs systématiques sont l'erreur d'étalonnage et celles dues aux conditions atmosphériques, essentiellement la température et la pression.

- Pour les **mesures d'angles**

- erreurs de collimation horizontale et verticale
- erreur de tourillonnement
- erreur d'excentricité de l'axe de rotation de l'alidade
- inégalité des graduations du limbe
- erreurs dues à la réfraction, etc.

III.8.2.b.2 Les erreurs accidentelles

Sont appelées accidentelles les erreurs qui ne présentent pas un caractère systématique, c'est-à-dire qui ne peuvent être ni calculées d'avance ni éliminées par la méthode opératoire ; elles sont dues à des causes fortuites ou non analysables ; on ne peut que constater leur existence et les subir. Elles changent ou non de signe, mais changent continuellement de valeur. Détaillons ces erreurs pour les deux principaux types de mesures effectuées en topométrie, à savoir :

- Pour les **mesures de longueurs**

- par chaînage : ce sont essentiellement les erreurs de matérialisation de l'extrémité des portées et les erreurs de lecture
- par les IMEL : on retrouve certaines des erreurs de mesures d'angles ci-après

- Pour les **mesures d'angles** : ce sont surtout les erreurs de centrage, de pointé, de lecture et de flamboiement de l'air.

On définit deux types d'erreur :

- **l'erreur absolue** qui est la différence algébrique entre le résultat du mesurage et la valeur de comparaison. Suivant la valeur de comparaison utilisée, on distingue :

- l'erreur absolue véritable e qui est la différence algébrique entre le résultat du mesurage x et la valeur vraie μ s'écrit: $e = x - \mu$
- l'erreur apparente v , appelée écart probable en mesures directes et résidu en mesures indirectes, c'est la différence algébrique entre le résultat du mesurage x et la valeur conventionnellement vraie.

- **l'erreur relative** qui est le quotient de l'erreur absolue par la valeur vraie. C'est une valeur algébrique usuellement exprimée en pourcentage.

On ne peut pas tenir compte de l'erreur accidentelle sous forme d'une correction apportée au résultat du mesurage, mais, seulement à la fin d'une série de mesurages exécutés dans des conditions pratiquement identiques, on peut fixer les limites dans lesquelles se situe cette erreur avec une probabilité donnée. L'étude de ces limites constitue la théorie des erreurs accidentelles.

IV LE NIVELLEMENT DIRECT

IV.1 Principe

Le **nivellement direct**, appelé aussi nivellement géométrique, consiste à déterminer la **dénivelée** ΔH_{AB} entre deux points A et B à l'aide d'un appareil : **le niveau** et d'une échelle verticale appelée mire. Le niveau est constitué d'une optique de visée tournant autour d'un axe vertical (fig. 5.3.) : il définit donc un plan de visée horizontal (fig. 5.1.).

La mire est placée successivement sur les deux points. L'opérateur lit la valeur ma sur la mire posée en A et la valeur mb sur la mire posée en B. La différence des lectures sur mire est égale à la dénivelée entre A et B. Cette dénivelée est une valeur algébrique dont le signe indique si B est plus haut ou plus bas que A (si ΔH_{AB} est négative alors B est plus bas que A).

- la dénivelée de A vers B est : $\Delta H_{AB} = ma - mb$
- la dénivelée de B vers A est : $\Delta H_{BA} = mb - ma$

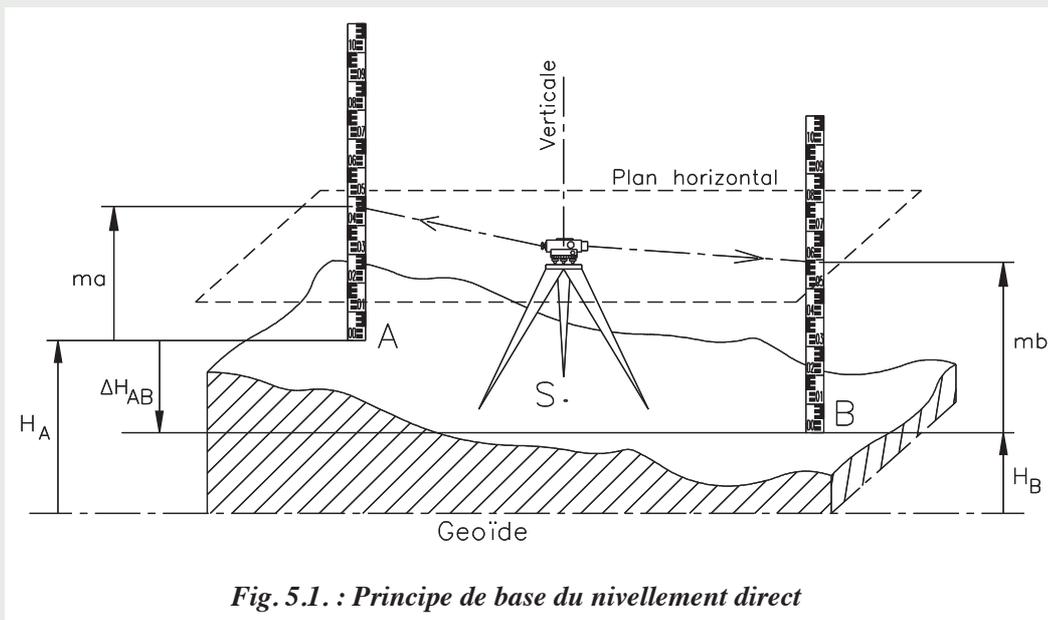


Fig. 5.1. : Principe de base du nivellement direct

L'altitude H_A d'un point A est la distance comptée suivant la verticale qui le sépare du géoïde (ou de la surface de niveau 0 définie localement). Si l'altitude du point A est connue, on peut en déduire celle du point B par :

$$H_B = H_A + \Delta H_{AB}$$

La **portée** est la distance du niveau à la mire ; elle varie suivant le matériel et la précision cherchée, et doit être au maximum de 60 m en nivellement ordinaire et 35 m en nivellement de précision. Dans la mesure du possible, l'opérateur place le niveau à peu près à égale distance de A et de B (sur la médiatrice de AB, fig. 5.2) de manière à réaliser **l'égalité des portées** (voir erreur de collimation dans la suite de ce cours).

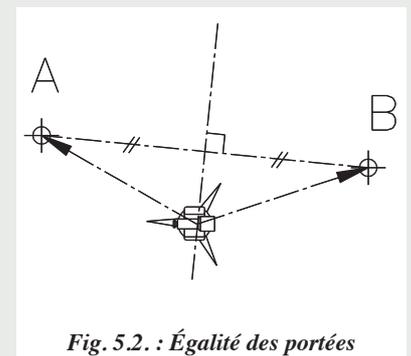


Fig. 5.2. : Égalité des portées

IV.2 Le niveau

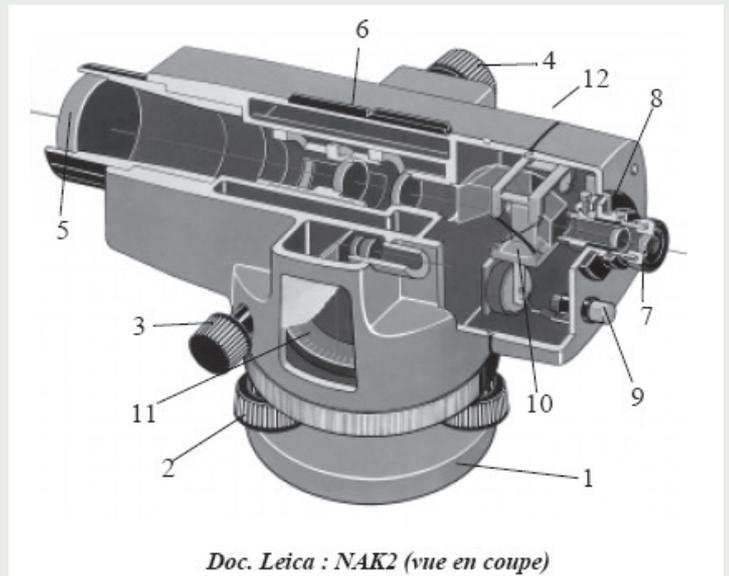
IV.2.1 Principe de fonctionnement

Le niveau est schématiquement constitué d'une optique de visée (lunette d'axe optique (O)) tournant autour d'un axe vertical (appelé axe principal (P)) qui lui est perpendiculaire (fig. 5.3.). Le réglage de la verticalité de l'axe principal est fait au moyen d'une nivelle sphérique. L'axe optique tournant autour de l'axe principal décrit donc un plan horizontal passant par le centre optique du niveau qui est l'intersection des axes (P) et (O).

L'axe principal (P) peut être stationné à la verticale d'un point au moyen d'un fil à plomb, mais généralement le niveau est placé à un endroit quelconque entre les points A et B, si possible sur la médiatrice de AB (fig. 5.2.). Un niveau n'est donc pas muni d'un plomb optique comme un théodolite.

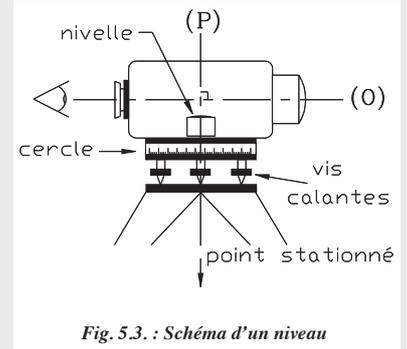
Les éléments constitutifs d'un niveau sont les suivants :

- 1. Embase
- 2. Vis calantes (3 vis)
- 3. Rotation lente
- 4. Mise au point sur l'objet
- 5. Objectif
- 6. Viseur d'approche rapide
- 7. Oculaire
- 8. Anneau amovible
- 9. Contrôle de l'automatisme
- 10. Compensateur à pendule
- 11. Cercle horizontal
- 12. Nivelles sphérique



Pour déterminer précisément des dénivelées, l'appareil doit vérifier :

- la perpendicularité de (O) et (P) ;
- que le fil horizontal du réticule de visée est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe principal (P) ;
- que l'axe optique (O) est parallèle à la directrice de la nivelles, si c'est une nivelles torique, ou que le plan décrit par l'axe optique (O) tournant autour de l'axe principal (P) est parallèle au plan dans lequel est inscrit le cercle de centrage de la bulle, si la nivelles est sphérique.



IV.2.2 Mise en station d'un niveau

Le niveau n'étant pas (ou très rarement) stationné sur un point donné, le trépied est posé sur un point quelconque. L'opérateur doit reculer après avoir positionné le trépied afin de s'assurer de l'horizontalité du plateau supérieur. Lorsque le plateau est approximativement horizontal, l'opérateur y fixe le niveau.

Le calage de la **nivelles sphérique** se fait au moyen des vis calantes, en agissant sur les deux vis calantes V1 et V2 (en les tournant en sens inverse l'une de l'autre), l'opérateur fait pivoter le corps du niveau autour de la droite D3. Il amène ainsi la bulle de la nivelles sur la droite D2 parallèle à D3. En agissant ensuite sur la vis calante V3, il fait pivoter le niveau autour de la droite D1 et centre ainsi la bulle dans le cercle de centrage de la nivelles sphérique.

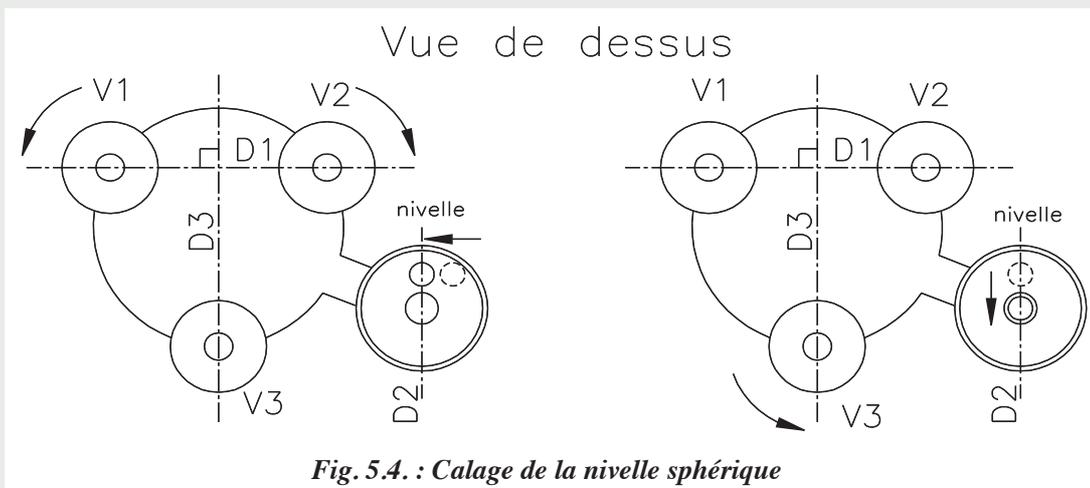


Fig. 5.4. : Calage de la nivelles sphérique

Ce calage n'est pas très précis car la nivelles sphérique est d'une **sensibilité relativement faible** : par exemple, pour un NA20, la sensibilité de la nivelles sphérique est de $8' / 2 \text{ mm}$ soit une rotation angulaire de 15 cgon pour un déplacement de 2mm. Une erreur de calage de la bulle de 0,2 mm entraînerait donc une erreur angulaire de $\epsilon = 1,5 \text{ cgon}$.

La visée sur une mire placée à 35 m donne un écart $e = 35 \cdot 10^3 \cdot \tan \epsilon \approx 8 \text{ mm}$ sur la mire (voir fig. 5.5.). Nous verrons que les lectures sur mire sont appréciées au millimètre près : cette erreur due à l'imprécision de la nivelles est donc inacceptable.

En fait, sur un niveau moderne (dit « automatique »), le calage de la nivelle sphérique ne sert qu'à approcher l'axe principal de la verticale. L'horizontalité de la ligne de visée est ensuite calée plus finement par **un automatisme** qui ne fonctionne correctement que lorsque l'axe vertical est proche de la verticale.

Sur un niveau sans automatisme, une nivelle torique de directrice parallèle à l'axe optique permet un calage précis de la ligne de visée, mais elle doit être calée avant chaque pointé sur mire. Son calage et son réglage obéissent aux mêmes principes que les nivelles toriques des théodolites.

IV.2.3 Le niveau automatique

Par abus de langage certains niveaux sont dits « automatiques » laissant croire que tout se passe sans intervention humaine.

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la nivelle sphérique permet un réglage d'approche de la verticalité de l'axe principal. Lorsque celui-ci est proche de la verticale (dans une certaine plage de débattement), l'axe optique est automatiquement positionné à l'horizontale par un **compensateur** qui, schématiquement, est un système mobile soumis à la pesanteur : sur la figure 5.6., le compensateur est composé de deux prismes fixes et d'un prisme mobile, libre d'osciller, suspendu à l'appareil par des fils. Sous l'action de la pesanteur, la rotation du prisme mobile assure l'horizontalité de la ligne de visée. Le compensateur peut aussi être basé sur l'équilibre d'un liquide, par exemple le mercure.

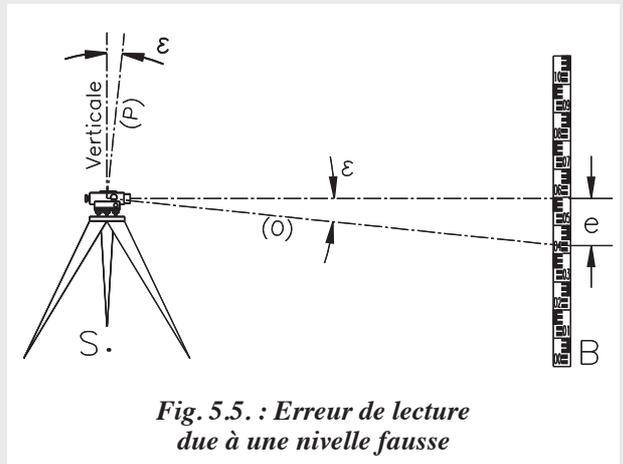


Fig. 5.5. : Erreur de lecture due à une nivelle fautive

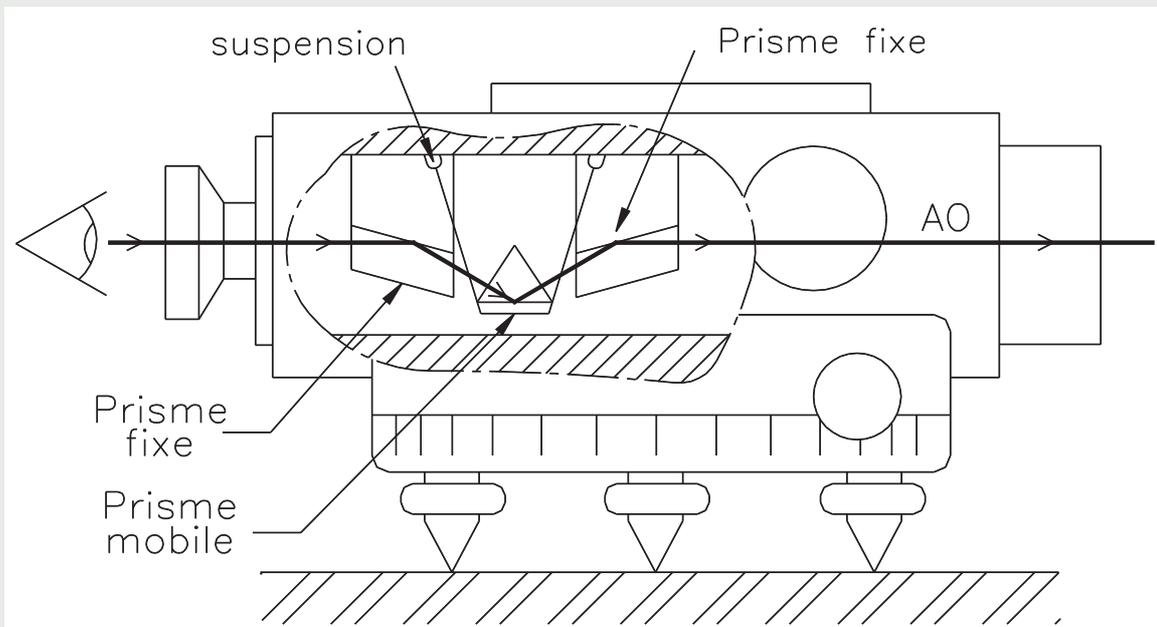


Fig. 5.6. : Schéma d'un compensateur à pendule

Le compensateur fonctionne dans une **plage de débattement** donnée : en dehors de cette plage, le mécanisme est en butée et ne remplit plus son rôle ; à l'intérieur de cette plage, le compensateur oscille librement. Cette plage est par exemple de 30' (0,6gon) pour un NA2, ce qui est supérieur à la sensibilité de la nivelle de manière à être certain que l'automatisme ne soit pas en butée.

La **précision de calage** obtenue par ce type d'appareil est excellente : par exemple $\pm 0,3''$ (0,9 dmgon) pour un NA2 induit un écart de $\pm 0,05$ mm sur la mire à 35 m.

Un **bouton de contrôle**, souvent appelé par erreur automatisme dans les documentations, permet de s'assurer du bon fonctionnement du compensateur. L'opérateur appuie sur ce bouton avant d'effectuer chaque visée, ce qui fait osciller le prisme mobile. Il peut ainsi s'assurer que l'image de la mire oscille librement et se stabilise rapidement. Ceci permet de contrôler que le niveau est toujours bien positionné avant chaque mesure. Pour qu'il soit utilisable, le compensateur doit avoir un temps d'oscillation très court; il est donc amorti de manière magnétique (aimant permanent), pneumatique, etc.

IV.2.4 La lunette

C'est une lunette du type « lunette astronomique » composée d'un oculaire (o), d'un objectif (b), d'un dispositif de mise au point (m) et d'un réticule (r), (fig. 5.7.).

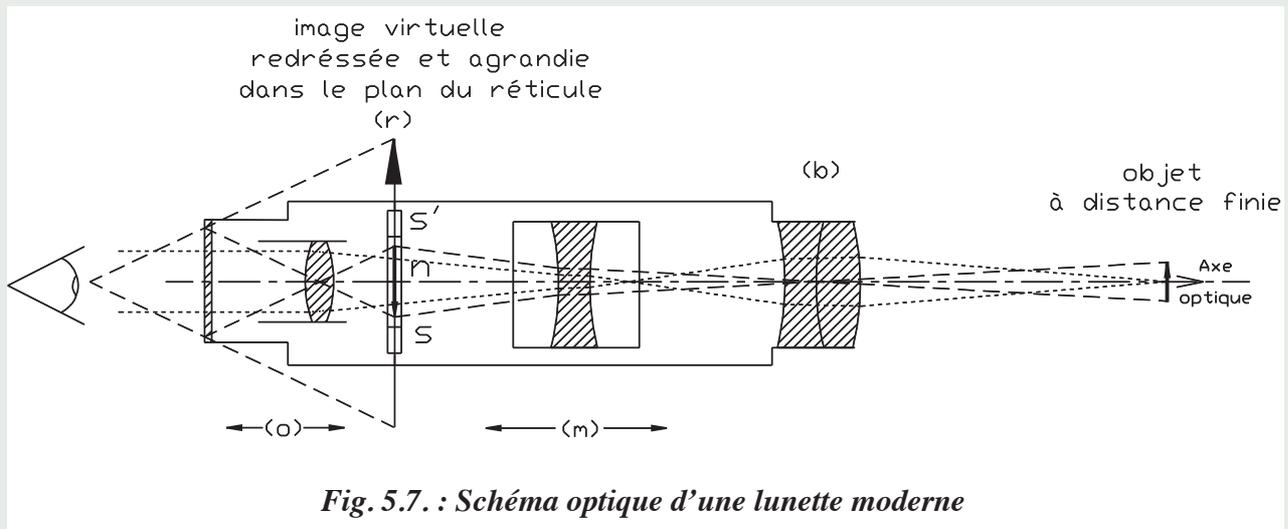


Fig. 5.7. : Schéma optique d'une lunette moderne

Placé du côté de l'objet, l'**objectif (b)** est un système optique fixe convergent à grande distance focale qui fournit une image virtuelle renversée de l'objet visé. La mise au point est faite par une lentille divergente mobile (m). Placé du côté de l'œil, l'**oculaire (o)** est un ensemble de lentilles, dont certaines sont mobiles, qui permet d'agrandir et de redresser l'image virtuelle de l'objet. **Le réticule (r)** est une plaque de verre sur laquelle sont gravées des lignes définissant l'axe optique (fil niveleur (n) et fil vertical (v), fils stadimétriques (s') et (s), fig. 5.7. et 5.8.). **L'axe optique** est la droite joignant la croisée des fils du réticule et le centre optique de l'objectif.

La lunette schématisée sur la figure 5.7. est une lunette à mise au point interne, technologie actuellement la plus courante dont l'avantage principal est une meilleure étanchéité.

Le schéma optique, simplifié, fait apparaître une première image de l'objet visé inversée et mise au point dans le plan du réticule par l'ensemble objectif (b) et lentille mobile (m). Cette image est ensuite redressée et agrandie par l'oculaire (o). La mise au point de l'oculaire est telle que l'observateur accommode ses yeux à l'infini, position la plus reposante pour une personne n'ayant pas de problèmes de vue. On conseille d'ailleurs souvent de garder les deux yeux ouverts lorsque l'on regarde dans une lunette de ce type.

Le réglage de la netteté du réticule et de l'image de l'objet visé se fait comme suit :

- 1- réglage de l'**oculaire** jusqu'à obtenir la netteté maximale sur les fils du réticule, l'objectif étant calé à l'infini
- 2- réglage de l'**objectif** : amener l'image de l'objet visé dans le plan du réticule. À la fin de ce deuxième réglage, l'image et le réticule doivent être nets. Affiner si nécessaire

Pour contrôler la qualité d'un réglage, l'opérateur peut, en déplaçant la tête devant l'objectif soit de gauche à droite soit de haut en bas, s'assurer qu'il n'y a pas de parallaxe. S'il y a du parallaxe, les fils semblent se déplacer par rapport à l'image puisque l'image n'est pas exactement dans le plan du réticule.

IV.2.5 Lectures sur mire

La mire est une échelle linéaire qui doit être tenue verticalement (elle comporte une nivelle sphérique) sur le point intervenant dans la dénivellée à mesurer. La précision de sa graduation et de son maintien en position verticale influent fortement sur la précision de la dénivellée mesurée.

La mire classique est généralement graduée en centimètre. La chiffration est souvent en décimètre (fig. 5.8.).

Le réticule d'un niveau est généralement constitué de quatre fils :

- le fil stadimétrique supérieur (s'), qui donne une lecture m1 sur la mire
- le fil stadimétrique inférieur (s), qui donne la lecture m2 sur la mire
- le fil niveleur (n), qui donne la lecture m sur la mire
- le fil vertical (v), qui permet le pointé de la mire ou d'un objet.

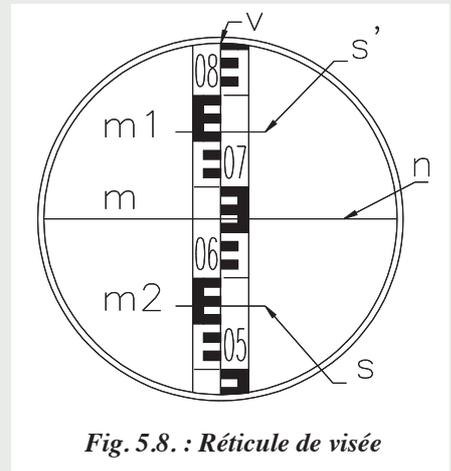


Fig. 5.8. : Réticule de visée

La lecture sur chaque fil est estimée visuellement au millimètre près (6,64 dm sur la figure 5.8., fil niveleur). Les fils stadimétriques permettent d'obtenir une valeur approchée de la portée. Pour chaque lecture, il est judicieux de lire les trois fils horizontaux de manière à éviter les fautes de lecture: on vérifie en effet, directement sur le terrain, que : Par exemple, figure 5.8. : $6,64 \text{ dm} \approx (5,69 + 7,60)/2$.

On peut estimer l'incertitude d'une lecture par interpolation sur une mire centimétrique à $4/G$ egon, G étant le grossissement de la lunette. Si l'on désire une incertitude de lecture de 1 mm avec une lunette de grossissement $G = 24\times$, la portée maximale de visée devra être de : $D_{\max} = 1.10^{-3}/(4/24.10^{-2} \cdot \pi/200) = 38 \text{ m}$. La portée maximale usuellement retenue est de l'ordre de 30 m du niveau à la mire en nivellement de précision.

IV.2.6 Estimation de la portée par stadimétrie

La portée, c'est-à-dire la distance horizontale entre le point de station et le point visé, est utile dans les calculs de cheminement. Disposer d'un ordre de grandeur de sa valeur est nécessaire, par exemple, pour vérifier l'égalité des portées. C'est le rôle des fils stadimétriques qui, par lecture de la valeur $L = m1 - m2$ interceptée sur la mire, permettent de calculer la distance horizontale D_{hSP} à $\pm 14 \text{ cm}$ près (fig. 5.9.).

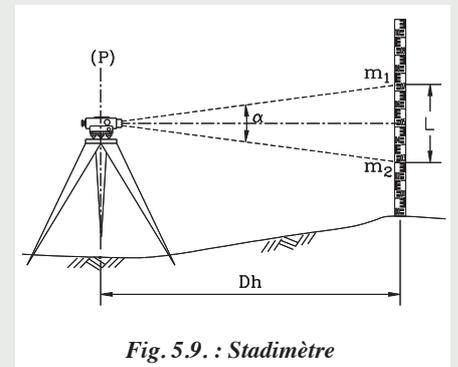


Fig. 5.9. : Stadimètre

Nous allons établir la **formule de stadimétrie** ; pour cela, nous raisonnons à partir du schéma simplifié de la figure 5.10.a. où l'image de l'objet vue par l'opérateur est renversée. Si l'on considère que la mire utilisée est renversée, on retrouve la situation classique : le fil stadimétrique supérieur (s') lit la valeur la plus grande m1 et le fil (s) lit la valeur m2. f étant la distance focale de l'objectif, on peut écrire :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{m_1 + m_2}{2(Dh - E)} = \frac{s}{2f}$$

Le rapport s/f est une constante de l'appareil. E est appelée constante (ou correction) d'anallatisme ou encore constante d'addition. Posons :

$$\frac{f}{s} = K = \frac{1}{2 \tan(\alpha/2)}$$

K est appelée **constante stadimétrique**. La valeur usuelle de K est $K = 100$

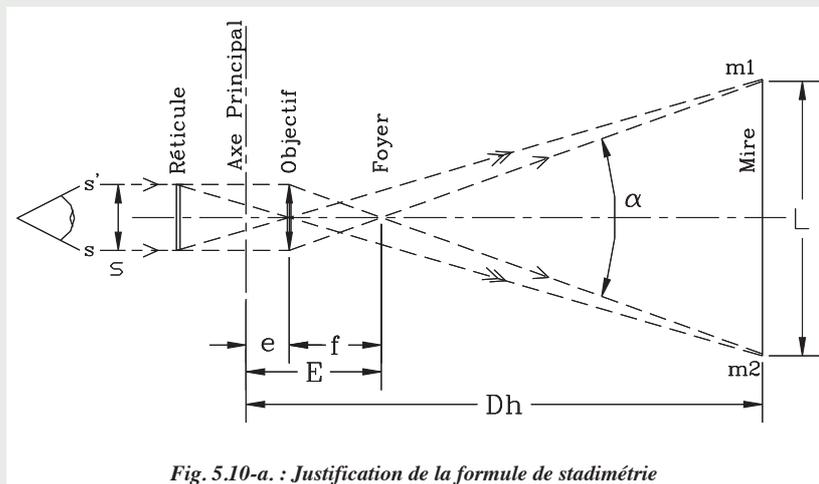


Fig. 5.10-a. : Justification de la formule de stadimétrie

De la première équation, on déduit :

$$Dh = K.(m_1 - m_2) + E$$

Pour les appareils modernes à mise au point intérieure, la constante d'addition E est réduite par construction à une valeur négligeable vis-à-vis de la précision obtenue sur Dh. Pour les appareils à mise au point extérieure, E est de l'ordre de 30 cm.

Finalement, on obtient (avec E = 0) :

$$Dh = K(m_1 - m_2) = KL$$

Le manque de précision sur la connaissance de Dh vient essentiellement de la valeur de la constante stadimétrique qui multiplie les erreurs de lecture sur mire par 100. La précision sur la distance horizontale Dh est de l'ordre de +/- 14 cm à 35 m avec un niveau classique (type NAK), ce qui est médiocre et ne fournit qu'un ordre de grandeur de Dh suffisant pour les calculs grossiers ou pour les compensations.

IV.2.7 Niveaux numériques

La lecture sur la mire est prise en charge par un système de reconnaissance d'une portion de **code-barre** lue sur une mire spécifique (voir fig. 5.28.). L'image de la mire utilisée est mémorisée dans l'appareil (sous forme numérique) et ce dernier détecte l'endroit de la mire sur lequel pointe l'opérateur par comparaison entre l'image numérisée du secteur de mire visible et l'image virtuelle en mémoire morte.

Cette phase de corrélation permet de mesurer la lecture sur la mire et l'éloignement de la mire à l'appareil (distance horizontale station-mire) avec une précision allant jusqu'à ± 0,01 mm sur la hauteur, et de l'ordre de ± 1 à ± 5 cm sur la distance horizontale et sur des portées classiques jusqu'à 30 m (± 3 à ± 5 mm à 10 m, précision comparable à celle d'un ruban de classe III).

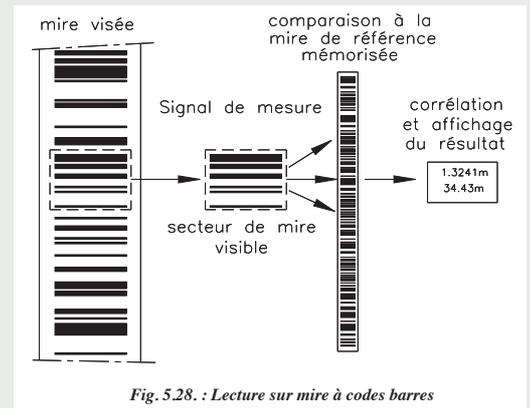


Fig. 5.28. : Lecture sur mire à codes barres

L'ensemble d'une séquence de mesure se découpe en quatre étapes pour un temps total inférieur à trois secondes:

- visée et mise au point (par l'opérateur),
- déclenchement de la mesure numérique (l'appareil active automatiquement le contrôle du compensateur),
- lecture de la mire (de 0,004 à 1 seconde en fonction de la distance de la mire),
- corrélation approximative (de 0,3 à 1 seconde),
- corrélation fine (de 0,5 à 1 seconde) et affichage de lecture et de la distance.

Le principal avantage est d'éliminer toute faute de lecture ou de retranscription due à l'opérateur, et de pouvoir enchaîner directement les mesures de terrain par un traitement informatique. Le gain de temps, estimé à 50 % par le constructeur, autorise donc un amortissement rapide de l'appareil.

IV.3 Cheminement simple

Lorsque les points A et B sont situés de sorte qu'une seule station du niveau ne suffit pas à déterminer leur dénivelée (éloignement, masque, dénivelée trop importante, etc.), il faut décomposer la dénivelée totale en dénivelées élémentaires à l'aide de points intermédiaires (I1, I2, ..., voir fig. 5.16.). L'ensemble de ces décompositions est appelé nivellement par cheminement.

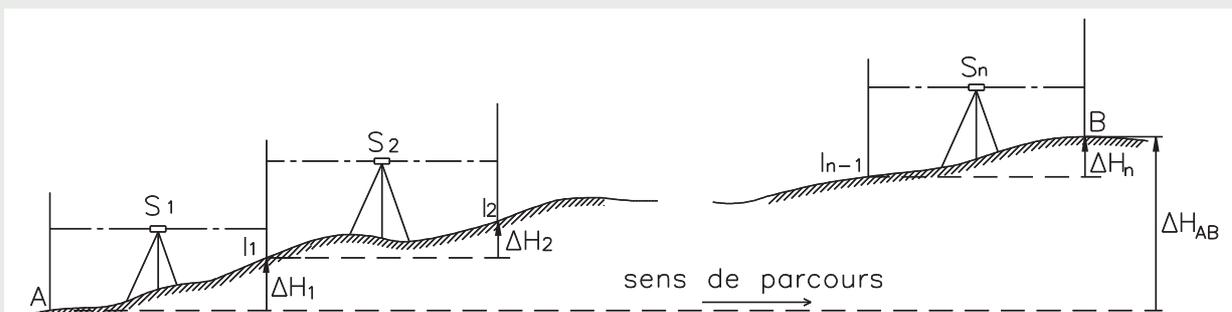


Fig. 5.16. : Cheminement de nivellement

Un cheminement encadré part d'un « point origine » connu en altitude, passe par un certain nombre de points intermédiaires et se referme sur un « point extrémité » différent du point d'origine et également connu en altitude. Le cheminement de la figure 5.16 est encadré entre A et B.

Lorsque l'on cherche à déterminer l'altitude d'un point extrémité B à partir de celle connue d'un repère A, on effectue généralement un cheminement aller-retour de A vers A en passant par B. Ceci permet de calculer l'altitude de B et de vérifier la validité des mesures en retrouvant l'altitude de A.

Lorsqu'un cheminement constitue une boucle retournant à son point de départ A, on l'appelle cheminement fermé. Il est très employé pour les raisons suivantes :

- il permet la détermination des altitudes même quand on ne connaît qu'un seul repère
- il est possible de calculer un tel cheminement en affectant une altitude arbitraire à un point de départ fixe et durable ; une simple translation permettra de passer des altitudes de ce système local aux altitudes vraies
- il permet un contrôle de fermeture qui est indépendant de la précision de connaissance de l'altitude du point de référence.

IV.3.1 Pratique du nivellement par cheminement

Un nivellement par cheminement s'effectue par les opérations suivantes :

- la mire étant sur le point origine A, l'opérateur stationne le niveau en S1 dont il détermine l'éloignement en comptant le nombre de pas séparant A de S1, de manière à ne pas dépasser la portée maximale de 60 m. L'opérateur fait une lecture arrière, c'est-à-dire dans le sens de parcours choisi, sur le point A, notée $m_{ar\ A}$
- le porte-mire se déplace pour venir sur le premier point intermédiaire I1 le plus stable possible (pierre, socle métallique appelé « crapaud », piquet etc.) et dont il détermine l'éloignement en comptant lui-même le nombre de pas séparant A de S1 afin de pouvoir reproduire ce nombre de pas de S1 à I1
- toujours stationné en S1, l'opérateur lit sur la mire la lecture avant sur I1 notée $m_{av\ I1}$
- il est alors possible de calculer la dénivelée de A à I1 de la manière suivante : $\Delta H_1 = m_{ar\ A} - m_{av\ I1} = \text{lecture arrière sur A} - \text{lecture avant sur I1}$.
- L'opérateur doit lire les fils stadimétriques et vérifier que $m \approx (m_1 + m_2)/2$
- l'opérateur se déplace pour choisir une station S2 et ainsi de suite
- les dénivelées partielles sont les suivantes :

$m_{ar\ A} - m_{av\ I1} = \Delta H_1$	dénivelée de A vers I1
$m_{ar\ I1} - m_{av\ I2} = \Delta H_2$	dénivelée de I1 vers I2
... ..	
$m_{ar\ I(i-1)} - m_{av\ I(i)} = \Delta H_i$	dénivelée de I(i-1) vers I(i)
... ..	
$m_{ar\ I(n-1)} - m_{av\ B} = \Delta H_n$	dénivelée de I(n-1) vers B

La dénivelée totale ΔH_{AB} de A à B est égale à la somme des lectures arrière diminuée de la somme des lectures avant.

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{ar} - \sum_{i=1}^{i=n} m_{av} = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta H_i = \Delta H_{AB}$$

Remarque: Si le cheminement est fermé, la dénivelée totale doit être égale à zéro

IV.3.2 Fermeture de cheminement

Connaissant l'altitude de A, on peut calculer à nouveau à partir des mesures de terrain, l'altitude de B : on appelle cette valeur de H_B la valeur observée, notée $H_{B\ obs}$.

Si les mesures étaient exemptes d'erreurs, on retrouverait exactement l'altitude connue H_B . En réalité, il existe un écart appelé **erreur de fermeture du cheminement** (ou plus simplement fermeture) qui est soumis à tolérance. Cette fermeture notée f_H vaut : $H_{B\ obs} - H_B$

Un moyen mnémotechnique permettant de se souvenir du sens de cette soustraction est de se rappeler que le signe de l'erreur de fermeture f_H doit être positif si l'altitude observée est supérieure à l'altitude réelle c'est-à-dire : $f_H > 0$ implique que $H_{B\text{ obs}} > H_B$.

L'arrêté du 21 janvier 1980 publié au Journal Officiel du 19 mars 1980 précise les tolérances applicables au nivellement. Ces valeurs sont précisées dans le tableau ci-dessous :

Tolérances $T_{\Delta H}$ en mm	$n \leq 16$	$n \geq 16$
Ordinaire	$4\sqrt{36L + L^2}$	$\sqrt{36N + \frac{N^2}{16}}$
Précision	$4\sqrt{9L + L^2}$	$\sqrt{9N + \frac{N^2}{16}}$
Haute précision	$8\sqrt{L}$	$2\sqrt{N}$

L est la longueur totale du parcours en kilomètre. N est le nombre de dénivelées. n est le nombre de dénivelées au kilomètre ($n = N / L_{\text{km}}$). La valeur limite $n = 16$ correspond à un cheminement dont la distance moyenne entre points est de 62,50 m soit une portée moyenne d'environ 30 m. Cette valeur est la limite supérieure autorisée en nivellement de haute précision.

IV.3.3 Compensation du cheminement

La compensation est l'opération qui consiste à répartir la fermeture sur toutes les mesures. La compensation, notée C_H , est donc l'opposée de la fermeture, c'est-à-dire : $C_H = -f_H$. Cet ajustement consiste à modifier les dénivelées partielles en répartissant la compensation totale C_H sur chacune d'elle. Cette répartition peut être effectuée de plusieurs manières :

- **proportionnellement au nombre N de dénivelées** : on choisira ce type de compensation dans le cas où la fermeture est très faible. La compensation sur chaque dénivelée est: $C_{Hi} = C_H/N$

Dans le cas où la fermeture est plus importante, on peut choisir entre les 2 méthodes de répartition suivantes :

- **proportionnellement à la portée** : on considère que plus la portée est importante et plus la dénivelée peut être entachée d'erreur. Ceci oblige à connaître un ordre de grandeur de la portée, qui est obtenu par stadimétrie. La compensation sur chaque dénivelée est alors :

$$C_{Hi} = C_H \frac{L_i}{\sum L_i}$$

- **proportionnellement à la valeur absolue de la dénivelée** : la compensation à appliquer à chaque dénivelée partielle du cheminement vaut donc :

$$C_{Hi} = C_H \frac{|\Delta H_i|}{\sum |\Delta H_i|}$$

Remarque: L'ajustement n'est qu'un mal nécessaire qui n'améliore jamais les mesures et rend donc inutiles les décimales de calcul sans signification ; donc les compensations partielles sont arrondies, au mieux, au millimètre leur somme devant toutefois être rigoureusement égale à la compensation totale. Le contrôle du calcul consiste à vérifier que l'altitude de l'extrémité obtenue de proche en proche depuis celle de l'origine à l'aide des dénivelées compensées est strictement égale à l'altitude connue.

V MESURES ANGULAIRES

V.1 Le théodolite optico-mécanique

V.1.1 Principe de fonctionnement

Un théodolite est un appareil permettant de mesurer des angles horizontaux (angles projetés dans un plan horizontal) appelés **angles azimutaux** et des angles verticaux (angles projetés dans un plan vertical) appelés **angles zénithaux**. Le terme théodolite « optico-mécanique » regroupe l'ensemble des appareils à lecture « mécanique » par vernier gradué en comparaison aux appareils « optico-électroniques », appelés aussi stations, dont la lecture se fait sur un écran à affichage numérique et qui intègrent souvent un appareil de mesure électronique des distances (IMEL).

- **(P) : axe principal**, il doit être vertical après la mise en station du théodolite et doit passer par le centre de la graduation horizontale (et le point stationné).
- **(T) : axe secondaire** (ou axe des tourillons), il est perpendiculaire à (P) et doit passer au centre de la graduation verticale.
- **(O) : axe optique** (ou axe de visée), il doit toujours être perpendiculaire à (T), les trois axes (P), (T) et (O) devant être concourants.
- **L'alidade** : c'est un ensemble mobile autour de l'axe principal (P) comprenant le cercle vertical, la lunette, la nivelle torique d'alidade et les dispositifs de lecture (symbolisés ici par des index).
- **Le cercle vertical** (graduation verticale). Il est solidaire de la lunette et pivote autour de l'axe des tourillons (T).
- **Le cercle horizontal ou limbe** (graduation horizontale). Il est le plus souvent fixe par rapport à l'embase mais il peut être solidarisé à l'alidade par un système d'embrayage (T16) : on parle alors de mouvement général de l'alidade et du cercle autour de (P) ; c'est le mouvement utilisé lors du positionnement du zéro du cercle sur un point donné. Lorsqu'il est fixe par rapport au socle, on parle de mouvement particulier : c'est le mouvement utilisé lors des lectures angulaires. Sur le T2, un système de vis sans fin permet d'entraîner le cercle et de positionner son zéro.

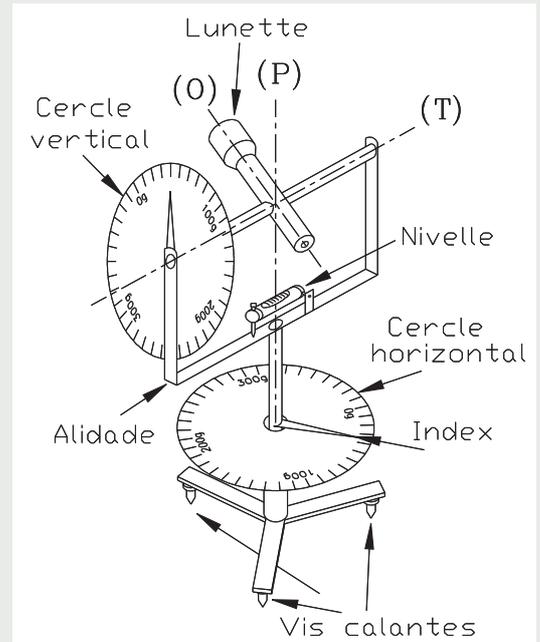
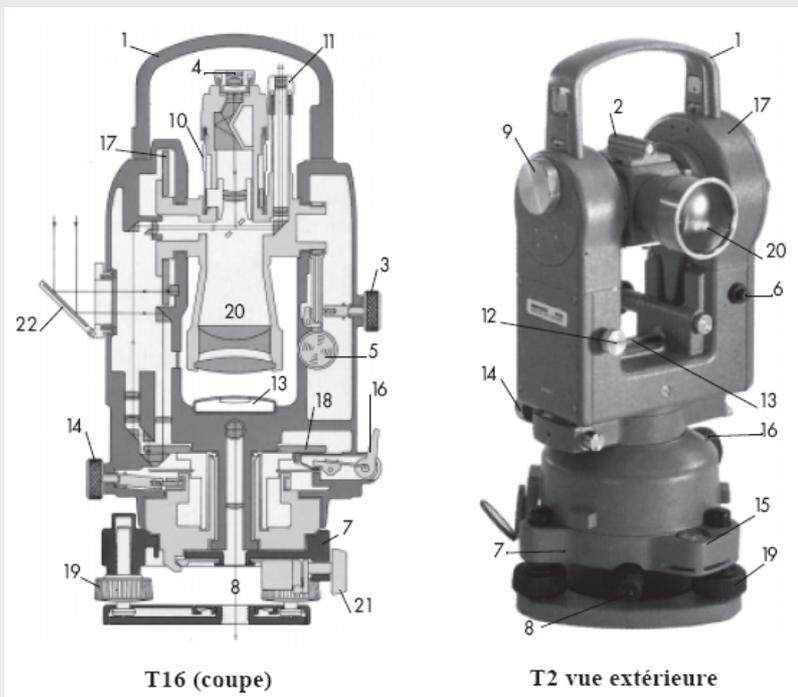


Fig. 3.1. : Schéma de principe d'un théodolite



T16 (coupe)

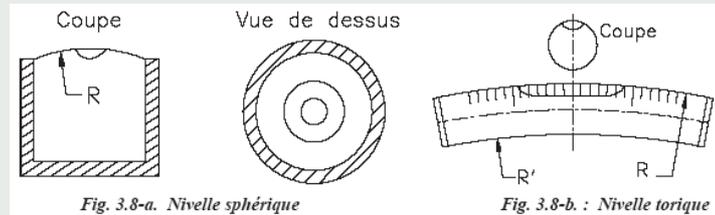
T2 vue extérieure

1. Poignée amovible
2. Viseur d'approche
3. Vis de blocage de la lunette
4. Oculaire de la lunette
5. Vis de fin pointé
6. Contrôle d'automatisme
7. Embase amovible
8. Plomb optique
9. Micromètre optique
10. Bague de mise au point
11. Microscope de lecture
12. Commutateur de lecture Hz-V
13. Nivelle d'alidade
14. Vis d'alidade de fin pointé
15. Nivelle sphérique
16. Débrayage du limbe (T16)
17. Cercle vertical
18. Cercle horizontal
19. Vis calantes
20. Objectif
21. Blocage de l'embase

V.1.2 Mise en station

La mise en station d'un théodolite consiste à caler l'axe principal à la verticale d'un point de station donné à l'aide des nivelles.

Une nivelle est un petit récipient de cristal appelé aussi fiole. Elle est remplie d'un mélange d'alcool et d'éther dans lequel subsiste une bulle de vapeur. Dans une **nivelle sphérique**, la face supérieure du verre retenant la bulle est une calotte sphérique (fig. 3.8-a). Une **nivelle torique** est un fragment de tore (fig. 3.8-b). Les rayons de courbure sont grands (de l'ordre du mètre pour les nivelles sphériques et de 10 à 100 mètres pour les nivelles toriques), donc imperceptible à l'oeil. Ces considérations justifient que la nivelle sphérique soit une nivelle d'approche dont le calage est multidirectionnel, alors que la nivelle torique, qui est unidirectionnelle, sert au calage fin. La directrice d'une nivelle torique est la droite tangente à sa face supérieure et située dans le plan vertical de son axe.



Remarque: Le frottement qui empêche parfois la bulle d'atteindre sa position d'équilibre est appelé « erreur de paresse » et peut atteindre le dixième de la sensibilité de la nivelle (voir définition de la sensibilité ci-après).

V.2 Précision des mesures angulaires

V.2.1 Erreurs systématiques dues à un défaut de l'appareil

- **Graduation et géométrie des cercles** : L'irrégularité des graduations des cercles et le défaut de perpendicularité du cercle horizontal avec l'axe principal.
- **Défauts d'excentricité** : Le défaut d'excentricité de l'axe principal passant ou non par le centre du cercle horizontal et le défaut d'excentricité de l'axe secondaire passant ou non par le centre du cercle vertical.
- **Tourillonnement** : L'axe secondaire (T) n'est pas perpendiculaire à l'axe principal (P).
- **Collimation horizontale** : L'axe de visée n'est pas perpendiculaire à l'axe secondaire (T).
- **Erreur d'index de cercle vertical** : L'index du cercle vertical n'est pas situé sur la verticale du centre du cercle.
- **Erreur d'excentricité du viseur** : L'axe de visée ne coupe pas l'axe principal ou l'axe secondaire.
- **Jeux de fonctionnement** : La variation de la position des axes de rotation (P) et (T) est due à la présence obligatoire de jeux de fonctionnement dans les mécanismes de guidage en rotation.

V.2.2 Erreurs systématiques dues à une cause extérieure

Il s'agit essentiellement des erreurs dues à la réfraction atmosphérique qui incurve le trajet de tout rayon lumineux. Les réfractions sont de deux types :

- réfraction **latérale** : elle est due à la présence d'une paroi exposée au soleil. Elle est impossible à évaluer ;
- réfraction **verticale** : elle est due aux variations de densité de l'atmosphère, elle peut être évaluée et corrigée.

Il faut éviter les visées rasantes près d'obstacles importants, au-dessus d'un cours d'eau, trop près du sol par temps chaud à cause du flamboiement de l'air.

V.2.3 Erreurs accidentelles

- **Erreur de calage de l'axe principal** : Le calage parfait de l'axe principal est très difficile à réaliser : il n'est jamais parfaitement vertical.
- **Erreur de centrage sur le point stationné**
- **Erreur de pointé**
- **Erreurs de lecture** : Pour éviter ce type d'erreur, il faut soigner la lecture sur vernier et effectuer des doubles lectures. Les appareils électroniques à affichage digital limitent les erreurs de lecture et les erreurs de retranscription (en particulier s'ils sont munis d'une interface informatique).
- **Déplacement accidentel de l'appareil** : C'est par exemple un déplacement dû à un choc sur un pied. Le contrôle s'effectue en refermant chaque série de lectures angulaires sur le point de départ (fermeture d'un tour d'horizon). Cette manipulation permet aussi de contrôler la dérive du zéro.

- **Erreur de dérive du zéro** : Cette erreur est due à la torsion du trépied : les trépieds en bois (ou en métal) étant peu massifs (pour faciliter leur transport) et relativement peu rigides, il existe des phénomènes de torsion du trépied dus aux passages et aux manipulations de l'opérateur, aux dilatations différentielles des pieds sous l'effet du soleil, etc.

Ces phénomènes entraînent une dérive du zéro qui peut affecter des mesures de très grande précision (dmgn). Pour les minimiser, il est donc recommandé :

- de rester en station le moins longtemps possible sur un point
- d'effectuer les observations à l'ombre d'un parasol
- ou bien d'utiliser comme en métrologie des trépieds très massifs et stables.

En mesurage de précision, il est possible de contrôler cette dérive en pointant régulièrement un signal fixe (ou mire de torsion) et en tenant compte de l'évolution des lectures.

V.3 Les angles horizontaux

V.3.1 Le cercle horizontal

Le cercle horizontal (ou limbe) est la graduation du théodolite sur laquelle l'opérateur lit les angles horizontaux. Il est lié au socle de l'appareil mais peut aussi pivoter sur lui-même de manière à régler le zéro des graduations sur une direction donnée. Il existe plusieurs technologies possibles pour cette mise à zéro : le débrayage de l'entraînement du cercle (T16) ou bien le mouvement par vis-écrou (T2).

Après la mise en station du théodolite, ce cercle est horizontal, ce qui explique que les angles lus soient des angles projetés sur le plan horizontal et appelés angles horizontaux (ou **azimutaux**), notés Hz. Sur la figure 3.19, l'appareil est en station sur le point S. L'opérateur vise le point A (sommet du bâtiment) et règle le zéro des graduations sur ce point. En visant le point B, il lit dans le théodolite l'angle horizontal A' - S' - B' (A', B', S' sont les projections de A, B et S sur le plan horizontal passant par l'axe des tourillons de l'appareil).

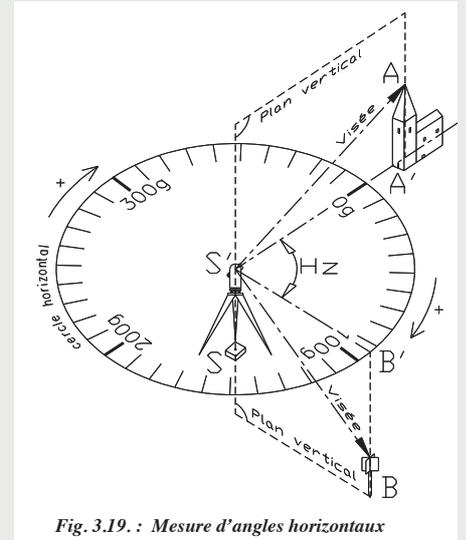


Fig. 3.19. : Mesure d'angles horizontaux

V.3.2 Le double retournement

C'est une manipulation consistant en un demi-tour simultané de la lunette et de l'alidade (fig. 3.20). Cette technique de mesure permet d'éliminer certaines erreurs systématiques et de limiter les fautes de lecture. Lors d'une mesure d'angle horizontal, cela permet :

- de doubler les lectures et donc de diminuer le risque de faute de lecture ;
- de ne pas toujours lire sur la même zone du limbe, donc de limiter l'erreur due aux défauts de graduation du limbe ;
- d'éliminer les défauts de collimation horizontale et de tourillonnement.

L'erreur de centrage sur le point de station et l'erreur de calage de l'axe vertical ne sont pas éliminées par cette manipulation. Il convient donc de soigner ces opérations.

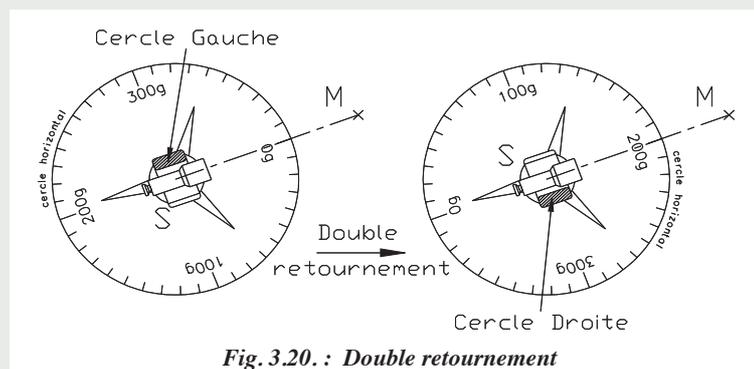


Fig. 3.20. : Double retournement

Pratiquement, on effectue :

- une lecture en cercle gauche (cercle vertical de l'appareil à gauche de l'opérateur, plus généralement en position de référence) ;
- un double retournement ;
- une nouvelle lecture du même angle en cercle droit (cercle vertical à droite).

Si l'on appelle H_{zCG} la valeur lue en cercle gauche, et H_{zCD} celle lue en cercle droit, on doit observer :

$$H_{zCD} \approx H_{zCG} + 200$$

En effet, le double retournement décale le zéro de la graduation de 200 gon (fig. 3.20) ; ceci permet un contrôle simple et immédiat des lectures sur le terrain. La différence entre les valeurs H_{zCG} et $(H_{zCD} - 200)$ représente la combinaison des erreurs de collimation, de mise en station, de lecture, etc. L'angle horizontal H_z mesuré vaut alors :

$$H_z = \frac{H_{zCG} + (H_{zCD} - 200)}{2} \quad \text{si } H_{zCD} > 200 \text{ gon}$$

$$H_z = \frac{H_{zCG} + (H_{zCD} - 200 + 400)}{2} = \frac{H_{zCG} + (H_{zCD} + 200)}{2} \quad \text{si } H_{zCD} < 200 \text{ gon}$$

V.3.3 Terminologie des mesures d'angles horizontaux

V.3.3.a Lecture simple

L'appareil étant dans sa position de référence (par exemple CG sur la figure 3.21), et le zéro de la graduation horizontale n'étant pas modifié après mise en station, l'opérateur effectue une lecture azimutale L_A sur le point A puis une lecture L_B sur B et en déduit l'angle ASB :

$$H_{zAB} = L_B - L_A$$

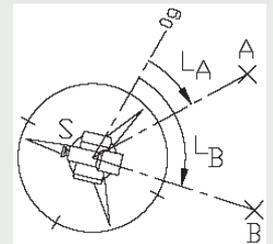


Fig. 3.21 : Lecture d'un angle horizontal

V.3.3.b Séquence

On appelle séquence un ensemble de $(n + 1)$ lectures effectuées à partir d'une même station sur n directions différentes avec la même position des cercles horizontaux et verticaux, le contrôle de fermeture sur la référence et la répercussion sur les n lectures de l'écart de fermeture sur la référence (sur laquelle on réduira les angles à zéro).

Par exemple, sur la figure 3.22, la référence est le point R sur lequel l'opérateur effectue la première lecture L_{R1} , on fait **une lecture sur chaque point en tournant en sens horaire** et une dernière **lecture de fermeture** sur le point R L_{R2} .

Par calcul, les lectures sont ensuite réduites à la référence R en soustrayant aux autres lectures **la moyenne des deux lectures** sur la référence. Pour cela, on calcule :

- la fermeture de la séquence : $F_s = |L_{R1} - L_{R2}|$
- la moyenne sur la référence : $L_R = (L_{R1} + L_{R2})/2$
- la lecture sur chaque point : $L'_j = L_j - L_R$

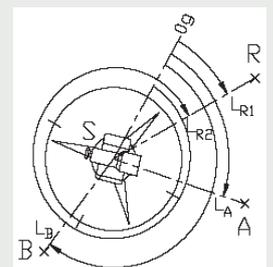


Fig. 3.22 : Séquence

La lecture sur la référence devient donc $L_R = 0$. La fermeture angulaire de chaque séquence est soumise à des tolérances réglementaires dont les valeurs fixées par l'arrêté de janvier 1980 (voir la bibliographie) correspondent à : **1,5 mgon en canevas de précision et 2,8 mgon en canevas ordinaire.**

V.3.3.c Paire de séquences

Une paire de séquence est l'association de deux séquences successives avec **un décalage de l'origine du limbe, le retournement de la lunette et l'inversion du sens d'observation.** Cette méthode permet de minimiser certaines erreurs systématiques. Généralement, l'opérateur effectue une séquence en CG dans le sens horaire de rotation de l'appareil puis effectue un double retournement et enfin effectue la séquence en CD dans le sens trigonométrique (sens inverse horaire). Pour une seule paire de séquences on décale l'origine du limbe de 100 gon ; le double retournement décale déjà l'origine du limbe de 200 gon (fig. 3.23).

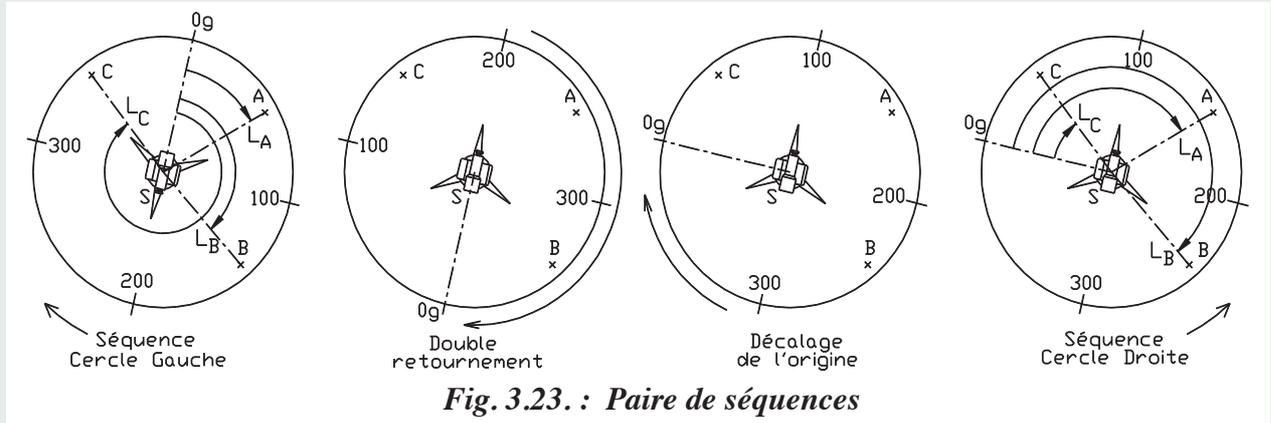


Fig. 3.23. : Paire de séquences

Paire	Origine	Sens de rotation	Position du cercle vertical
n° 1	0	sens horaire	CGauche
	100	sens trigo	CDroite
n° 2	50	sens horaire	CGauche
	150	sens trigo	CDroite

V.3.3.d Tour d'horizon

Le tour d'horizon est le résultat final de la combinaison des observations angulaires (séquences) en une même station et **rapportées à une même référence** (dans nos exemples le point R). Lors du calcul, on détermine la valeur moyenne de l'écart sur la référence : c'est la somme algébrique de tous les écarts de lecture d'une même paire divisée par $(n + 1)$, n étant le nombre de directions visées y compris la référence. Cet écart est soumis à des tolérances réglementaires :

- **0,7 mgon en canevas de précision** pour quatre paires (0,8 mgon pour huit paires) ;
- **0,8 mgon en canevas ordinaire** pour deux paires (0,9 mgon pour quatre paires).

V.3.3.e Paire de séquences réduite

C'est une paire de séquences sans fermeture et sans décalage du limbe. On l'utilise en lever de détails ou pour la mesure d'angles uniques, par exemple en polygonaion ordinaire.

- Arrivé en D, on effectue un double retournement et on inverse le sens de rotation.
- L'écart entre CG + 200 et CD doit rester constant (± 1 graduation).
- On prend la moyenne des deux lectures basée sur CG.

Station	Points	Lecture CG (gon)	Lecture CD (gon)	Moyenne
1	A	114,75	↑ 314,71	114,73
	B	207,23	7,28	207,23
	C	373,64	173,60	373,62
	D	↓ 86,19	286,14	86,16

V.4 Les angles verticaux

V.4.1 Le cercle vertical

La lecture d'un **angle vertical z , noté aussi V** , est réalisée de la manière suivante.

Sur la figure 3.35-a, est représentée une vue en élévation du cercle vertical d'un théodolite en position de référence (cercle gauche). Nous avons vu précédemment que ce cercle est solidaire de la lunette. Son zéro est placé sur l'axe de la lunette (visée). L'index de lecture est fixe et positionné à la verticale (zénith) du centre optique (t) de l'appareil, lui-même stationné à la verticale du point S . Lorsque la ligne de visée passe par un point M , l'index donne alors la lecture de l'angle z (ou V) intercepté sur le cercle vertical.

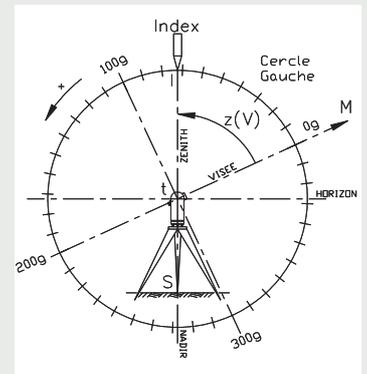


Fig. 3.35-a. : Lecture de l'angle zénithal z

Pour simplifier le schéma de lecture d'un angle zénithal, on considère que le zéro de la graduation est au zénith lorsque l'appareil est en station.

On considère alors que tout se passe comme si le cercle vertical était fixe et que l'index de lecture se déplaçait avec la visée (fig. 3.35-b).

Ceci permet de faire apparaître plus clairement :

- l'**angle de site i** entre l'horizon et la visée
- l'**angle nadiral n** entre le nadir et la visée.

Les configurations des figures 3.35-a et 3.35-b correspondent à la position de référence de l'appareil utilisé : dans cette position (cercle à gauche ou bien à droite), l'angle z vaut 100 gon sur l'horizontale.

En position de référence, une rotation de la lunette de haut en bas donne une augmentation de l'angle z de 0 à 200 gon.

Après un double retournement, la même rotation donne une évolution inversée : les angles diminuent de 399 gon à 200 gon.

Le cercle à gauche de l'opérateur (CG) est la position de référence de la plupart des appareils optico-mécaniques classiques. Soit un point M visé au théodolite, on note généralement :

- **V** tout angle mesuré dans un plan vertical
- **z** angle zénithal
- **i** angle de site (par rapport à l'horizon)
- **n** angle nadiral (par rapport au nadir)

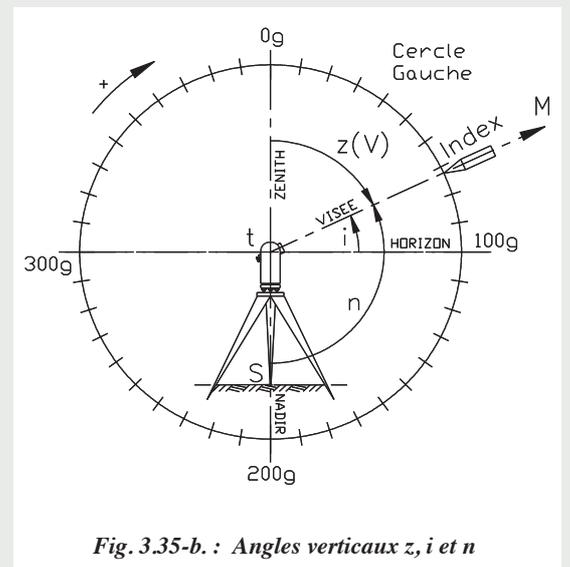


Fig. 3.35-b. : Angles verticaux z, i et n

V.4.2 Le double retournement

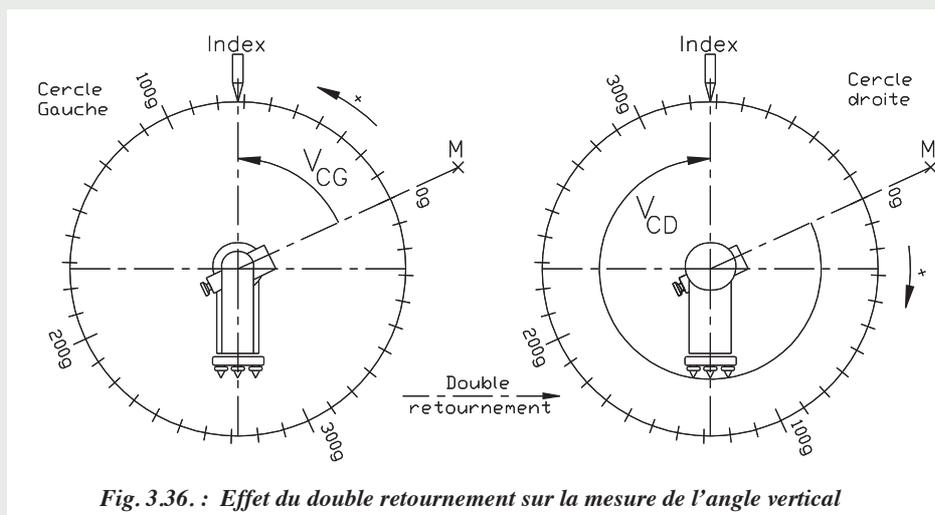


Fig. 3.36. : Effet du double retournement sur la mesure de l'angle vertical

Sur les schémas de la figure 3.36, on constate qu'après un double retournement le sens d'évolution de la graduation du cercle vertical est inversé. L'angle lu en cercle droit VCD n'est donc pas « directement comparable » avec l'angle lu en cercle gauche VCG , comme c'était le cas avec les angles horizontaux.

La relation entre les deux lectures est :

$$V_{CG} = 400 - V_{CD}$$

L'angle final moyen déduit des deux lectures est:

$$V = \frac{V_{CG} + (400 - V_{CD})}{2}$$

L'intérêt du double retournement est, comme pour les angles horizontaux, de limiter les fautes de lecture et d'éliminer certaines erreurs systématiques ou accidentelles (voir § 3). Dans le cas de mesure d'angles verticaux, le double retournement permet d'éliminer :

- **l'erreur d'excentricité** de l'axe optique par rapport à l'axe secondaire
- **l'erreur d'index** de cercle vertical : en effet, qu'il soit manuel (nivelle d'index) ou automatique (compensateur), le dispositif des appareils modernes ne cale pas exactement le zéro (index de lecture) à la verticale du centre du cercle mais dans deux positions voisines symétriques par rapport à cette verticale ;
- **le défaut de tourillonnement** (non-perpendicularité de l'axe secondaire et de l'axe principal).

Sur les schémas de la figure 3.37, on suppose la présence d'une erreur angulaire V_0 de position de l'index du cercle vertical par rapport à la verticale du centre du cercle.

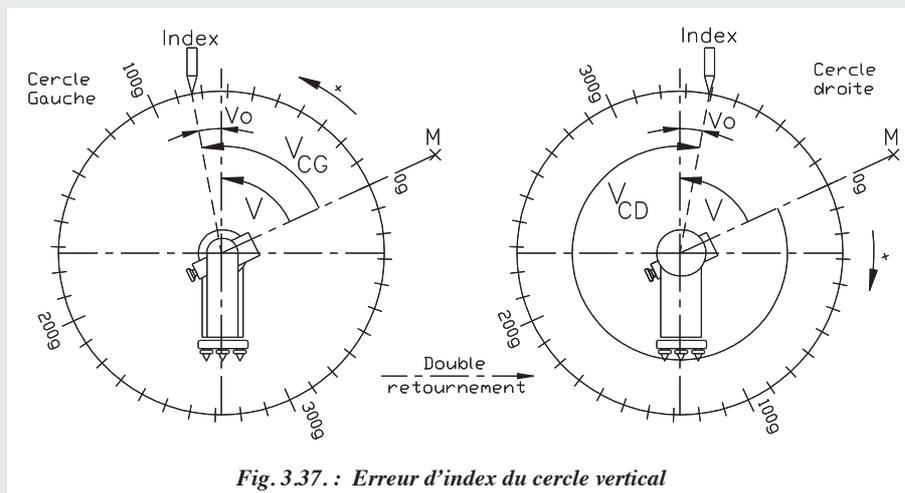


Fig. 3.37. : Erreur d'index du cercle vertical

Ce défaut est une constante de l'appareil qui peut varier. Il peut brusquement augmenter si la nivelle d'index vertical est dérégulée ou si le compensateur est défaillant. Il convient donc de l'évaluer régulièrement et de vérifier qu'il est à peu près constant (aux erreurs de lecture près). Si l'on constate qu'il varie beaucoup d'une station à l'autre, c'est que le système de calage de l'index vertical est dérégulé.

En cercle gauche, l'opérateur lit V_{CG} , l'angle V cherché vaut:

$$V = V_{CG} - V_0.$$

En cercle droit, l'opérateur lit V_{CD} , l'angle V cherché vaut

$$V = 400 - V_{CD} + V_0.$$

Si on fait la moyenne des deux valeurs, on retrouve

$$V = (V_{CG} + (400 - V_{CD}))/2.$$

Si on soustrait les deux équations, on isole V_0 et on obtient:

$$V_0 = \frac{(V_{CG} + V_{CD}) - 400}{2}$$

VI MESURES DES DISTANCES

VI.1 Historique

Alors que de tout temps on a su facilement mesurer des angles avec précision, la mesure de distances a toujours été un problème pour le topomètre. La précision des méthodes classiques de mesure n'était **pas homogène** avec la précision des mesures angulaires : on savait dès le début du siècle lire des angles à 2,5 dmgon près (ce qui donne un écart de 0,4 mm à 100 m) mais il était très difficile d'obtenir une précision au centimètre sur des bases courtes de 100 m de long.. Les mesures très précises au fil Invar demandaient beaucoup de temps et de moyens (L'Invar est un alliage d'acier à forte teneur en nickel et possédant un très faible coefficient de dilatation, inférieur à 1 mm/ km/°C, soit 10 fois moins que l'acier dans le domaine des températures courantes.).

Un premier progrès a été l'apparition des distancemètres (les premières mesures datent de 1948 à la suite de travaux du physicien Suédois Erik Bergstrand sur la connaissance de la vitesse de la lumière) : la mesure de distance est basée sur la mesure du déphasage d'une onde lumineuse ayant parcouru l'aller-retour sur la distance à mesurer. Ce procédé permet de s'affranchir des irrégularités du terrain et de la longueur limitée de la chaîne. Les premiers distancemètres étaient toutefois très encombrants, peu précis, de faible autonomie et très coûteux.

Le progrès décisif a été le **perfectionnement et la miniaturisation** de ces appareils qui sont aujourd'hui intégrés à l'optique même des théodolites modernes (stations totales). Les distancemètres actuels sont d'un encombrement négligeable, d'une autonomie suffisante pour une journée de travail au minimum et leur précision varie de $\pm(5 \text{ mm} + 5 \text{ mm /km})$ pour le DI 1001 à $\pm(1 \text{ mm} + 1 \text{ mm/km})$ pour le DI 2002 (Wild), soit environ $\pm 2 \text{ mm}$ pour 1 km. (cf. § 6 pour le détail de ces caractéristiques de précision en mm et mm/km).

La dernière étape est la démocratisation, depuis 1990, du système de **positionnement par satellite** qui permet, grâce à l'emploi de deux récepteurs, de mesurer la longueur d'une base avec une précision de l'ordre de $\pm(5 \text{ mm} + 1 \text{ mm/km})$ sur des distances de 10 à 15 km, le temps de mesure variant de 10 à 30 minutes quels que soient les obstacles situés entre les points et quelles que soient les conditions météorologiques, éventuellement de jour ou de nuit...

Dans ce chapitre, nous étudierons les principales techniques de mesure de distance utilisables par le topomètre en comparant les précisions de chacune. Le but n'est pas de déterminer la meilleure, mais d'en choisir une en fonction du matériel disponible et de la précision demandée.

Remarque: Certaines méthodes décrites dans les paragraphes suivants paraîtront bien poussiéreuses au topographe moderne, y compris la mesure au ruban, car avec les « stations totales » actuelles, l'opérateur réfléchit de moins en moins. Afin de faire réfléchir les futurs opérateurs, nous avons tout de même détaillé ces méthodes, sans toutefois revenir au schéma du tachéomètre Sanguet. Leur aspect formateur n'est pas négligeable, ne serait-ce que pour la réflexion personnelle et l'application du calcul trigonométrique.

VI.2 Mesures des distances à l'aide d'une chaîne

La mesure à la chaîne est le moyen le plus classique et utilisé pour déterminer les distances. Ses inconvénients principaux sont d'être tributaire du terrain (accidenté ou non, en forte pente ou non, etc.) et d'être limité en portée (les rubans utilisés couramment sont limités à 100 m). La précision de la mesure est également limitée et dépend fortement des opérateurs. Autrefois, **la chaîne** était une véritable chaîne à maillons étalonnée servant à mesurer les longueurs, appelée également **chaîne d'arpenteur**. Aujourd'hui, on utilise le **décamètre**, simple, double, triple ou quintuple, bien plus facile à manipuler. On a gardé le nom de **chaîne** qui devient le terme général englobant le décamètre, le double-décamètre, etc. On utilise aussi le terme de **ruban**.

Les rubans sont répartis en trois classes de précision, le tableau ci-dessous en donne les tolérances de précision fixées par une norme européenne.

	10 m	20 m	30 m	50 m	100 m
CLASSE I	$\pm 1,1 \text{ mm}$	$\pm 2,1 \text{ mm}$	$\pm 3,1 \text{ mm}$	$\pm 5,1 \text{ mm}$	
CLASSE II	$\pm 2,3 \text{ mm}$	$\pm 4,3 \text{ mm}$	$\pm 6,3 \text{ mm}$	$\pm 10,3 \text{ mm}$	$\pm 20,3 \text{ mm}$
CLASSE III	$\pm 4,6 \text{ mm}$	$\pm 8,6 \text{ mm}$	$\pm 12,6 \text{ mm}$	$\pm 20,6 \text{ mm}$	

La longueur d'un ruban est donnée à une température ambiante donnée (20 °C en général) et pour une tension donnée. Par exemple, le ruban Métralon en acier est étalonné avec une tension de 4,9 daN pour un ruban de 50 m de classe I. La force de tension à respecter est généralement indiquée sur le ruban. Les rubans en matériaux souples sont très sensibles à cette tension

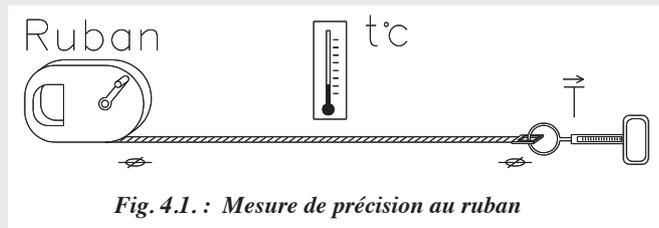


Fig. 4.1. : Mesure de précision au ruban

Lors de **mesures fines**, dont la précision doit avoisiner la tolérance du ruban, il faut :

- tenir le ruban par l'intermédiaire d'un dynamomètre pour assurer une tension optimale et éviter de l'allonger par traction lors de la mesure : un effort de 5 daN sur un ruban en acier de section $0,2 \times 13 \text{ mm}^2$ équivaut à un allongement de 5 mm sur un ruban de 50 m, ordre de grandeur de la tolérance de précision de la classe I. Si la chaîne est suspendue au-dessus du sol, l'opérateur doit régler la tension du dynamomètre de façon que l'erreur de chaînette, c'est-à-dire la forme incurvée prise par le ruban, s'annule avec l'allongement dû à la tension du ruban ;
- corriger la valeur lue du coefficient de dilatation linéaire du matériau du ruban (généralement de l'acier dont le coefficient vaut $11.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, soit un allongement de 5,5 mm sur un ruban de 50 m pour une augmentation de 10 °C;
- si le chaînage demande plusieurs portées de chaîne, aligner les différentes portées soit à vue, soit avec des fiches d'arpentage ou des jalons. Une erreur d'alignement de 30 cm sur un ruban de 50 m donne une erreur sur la distance mesurée de 1 mm. Dans ce cas, la mesure lue est plus grande que la valeur réelle.

VI.3 Mesure en terrain régulier

En topographie, la donnée essentielle est la distance horizontale entre deux points. Suivant la configuration du terrain, elle est plus ou moins difficile à obtenir précisément à la chaîne.

VI.3.1 Terrain régulier et horizontal

Si le terrain est régulier et en pente faible (moins de 2 %), il est possible de se contenter de poser le ruban sur le sol et de considérer que la distance horizontale est lue directement (fig. 4.2.). La précision qu'il est possible d'obtenir sur une mesure est au mieux de l'ordre de $\pm 5 \text{ mm}$ à 50 m pour un ruban de classe I.

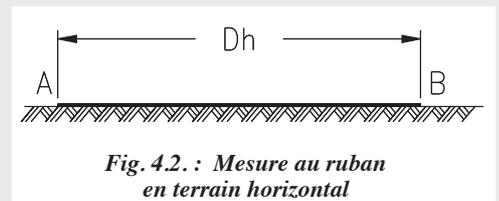


Fig. 4.2. : Mesure au ruban en terrain horizontal

VI.3.2 Terrain en pente régulière

Si le terrain n'est pas parfaitement horizontal, il faut considérer que l'on mesure la distance suivant la pente. Pour connaître la distance horizontale avec précision, il faut donc mesurer la dénivellée ΔH entre A et B ou bien la pente p de AB (fig. 4.3.).

$$Dh = \sqrt{Dp^2 - \Delta H^2}$$

Soit :

$$Dh = Dp \cdot \cos i = Dp \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 i}} = \frac{Dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Soit :

ou bien :

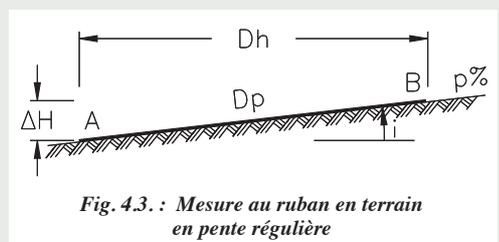


Fig. 4.3. : Mesure au ruban en terrain en pente régulière

VI.4 Mesure en terrain irrégulier

On ne peut pas tendre le ruban sur le sol à cause de ses ondulations. De plus, la pente (ou la distance à chaîner) est telle qu'on ne peut pas directement mesurer la distance Dh.

VI.4.1 Mesure par ressauts horizontaux

Citons pour mémoire la méthode appelée mesure par **ressauts horizontaux** ou cultellation. Illustrée par la figure 4.4., elle nécessite l'emploi d'un niveau à bulle et de deux fils à plomb en plus de la chaîne et des fiches d'arpentage (ou jalons). Sa mise en oeuvre est longue et le procédé peu précis.

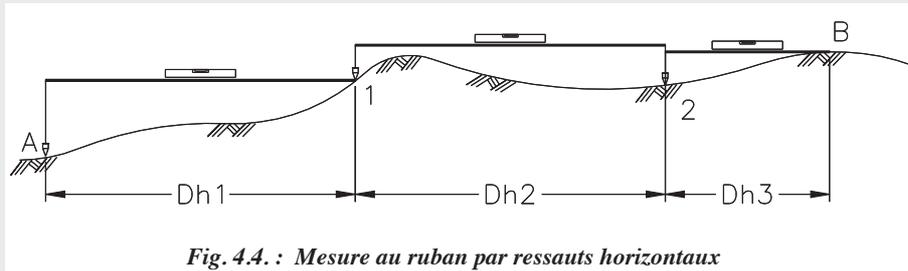


Fig. 4.4. : Mesure au ruban par ressauts horizontaux

Remarque: Lorsque l'opérateur doit reporter plusieurs fois le ruban pour mesurer une longueur, il faut aligner les portées. Cet alignement s'effectue généralement à vue en utilisant des fiches d'arpentage ou des jalons. Le défaut d'alignement doit être inférieur à 20 cm sur 30 m (ce qui est relativement facile à respecter) pour obtenir une précision au millimètre.

VI.4.2 Mesure en mode suspendu

Un fil en matériau stable (Invar) est **tendu au-dessus du sol**. La tension est maintenue **constante** par des poids (fig. 4.5.). L'opérateur doit mesurer la dénivelée ΔH entre les sommets A' et B' des tripodes de suspension du fil pour pouvoir calculer la longueur Dh en fonction de la distance inclinée Di mesurée :

$$Dh = \sqrt{Di^2 - \Delta H^2}$$

On sait calculer l'erreur sur la distance due à la forme de **chaînette** prise par le fil. Il est même possible d'annuler l'erreur de chaînette par un choix judicieux de la tension à appliquer au fil. Cette méthode donne des résultats satisfaisants en mesurage de précision mais elle est longue à mettre en oeuvre. On obtient une précision millimétrique pour des portées d'une centaine de mètres. Elle est applicable à un ruban.

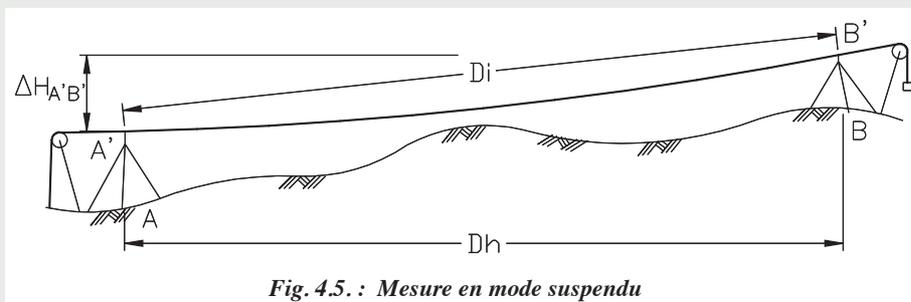


Fig. 4.5. : Mesure en mode suspendu

Remarque: La différence entre la longueur de la corde A'B' et celle de la chaînette peut être considérée comme constante pour une tension donnée et pour un fil donné (elle est fonction de son poids par unité de longueur) si la dénivellation entre A' et B' reste faible. C'est pourquoi certains constructeurs donnent la correction de chaînette à appliquer pour une tension donnée sous forme d'une correction d'étalement spécifique à la mesure en mode suspendu.

VI.5 Mesures stadimétriques

La stadimétrie est une méthode moins précise qui permet la mesure indirecte d'une distance horizontale en lisant la longueur interceptée sur une mire par les fils stadimétriques du réticule de visée. Le point A, centre optique d'un théodolite, est situé à la verticale du point stationné en S ; l'opérateur vise une mire posée en P et effectue la lecture interceptée par chaque fil sur la mire soit m1 et m2. La distance horizontale peut s'exprimer par :

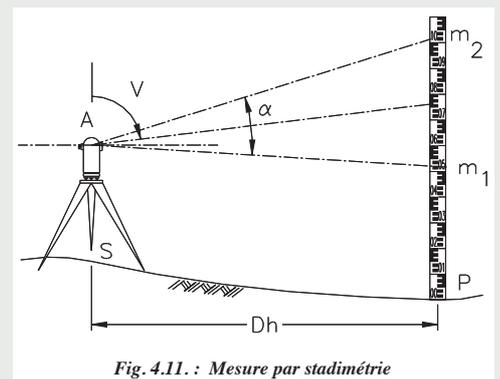


Fig. 4.11. : Mesure par stadimétrie

La distance horizontale peut s'exprimer par :

$$Dh = \frac{m_2 - m_1}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} \sin^2 V$$

Si la visée est horizontale, ($V = 100$ gon) ; on obtient :

$$Dh = \frac{m_2 - m_1}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

Sur les appareils classiques (cf IV.2.6), l'angle α est constant et on définit pour l'appareil une constante stadimétrique K , qui vaut généralement 100. C'est pourquoi l'expression de D_h devient:

$$Dh = 100(m_2 - m_1) \sin^2 V$$

VI.6 Mesure par I.M.E.L

Un IMEL, **Instrument de Mesure Électronique des Longueurs** ou distancemètre, est un appareil qui fonctionne le plus souvent par émission d'une onde électromagnétique, qui permet la mesure du déphasage de l'écho de cette onde renvoyée par un réflecteur.

Ces appareils peuvent être intégrés à l'optique d'un théodolite ou être montés en externe sur des bases de théodolites optico-mécaniques classiques ou électroniques. Ils fonctionnent sur la base de différentes technologies, dont les suivantes :

- les appareils **électro-optiques** utilisent une onde électromagnétique modulée par une onde porteuse lumineuse de type lumière blanche, infrarouge ou laser. Ce sont les plus utilisés dans le domaine de la topométrie. La photographie ci-joint (documentation Leica) présente trois types de distancemètres indépendants pouvant être associés à des théodolites optico-mécaniques ou électroniques ;
- les appareils à **micro-ondes** utilisent des micro-ondes dont les fréquences varient de 5 à 35 GHz (Gigahertz ou 10⁹ Hz) ;
- les appareils à **longues ondes** utilisent des ondes radio très longues, de l'ordre du kilomètre : d'une moins bonne précision que les appareils précédemment cités, ils sont très peu utilisés en topométrie.



Remarque: La précision des distancemètres varie actuellement de $\pm (5 \text{ mm} + 5 \text{ ppm})$, soit $\pm 1 \text{ cm}$ pour 1 km pour le DI 1001) à $\pm (1 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$, soit $\pm 2 \text{ mm}$ pour 1 km pour le Wild DI 2002. Le ppm (ou partie par million) représente 1 mm/km. La notation de l'écart type sous la forme $\pm (Cste + k \cdot ppm)$ est adoptée par tous les constructeurs. L'erreur ppm, dite proportionnelle, est essentiellement due à la précision de connaissance de l'indice de l'air. La portée des visées varie selon les ondes employées : les appareils utilisant l'infrarouge (les moins coûteux à réaliser) portent jusqu'à 7 km, par exemple le DI 2002 avec un miroir à onze prismes, dans des conditions atmosphériques très favorables c'est-à-dire sans brume, par temps couvert, avec une visibilité 30 km et en l'absence de flambonnement de l'air. Les appareils utilisant le laser portent jusqu'à 60 km en gardant une précision de $\pm (6 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$, soit $\pm 6,6 \text{ cm}$ sur 60 km. Ces appareils nécessitent toutefois plus de puissance à l'émission et sont plus coûteux. Les appareils à micro-ondes portent jusqu'à 150 km avec une précision de l'ordre de $\pm (1 \text{ cm} + 3 \text{ ppm})$.

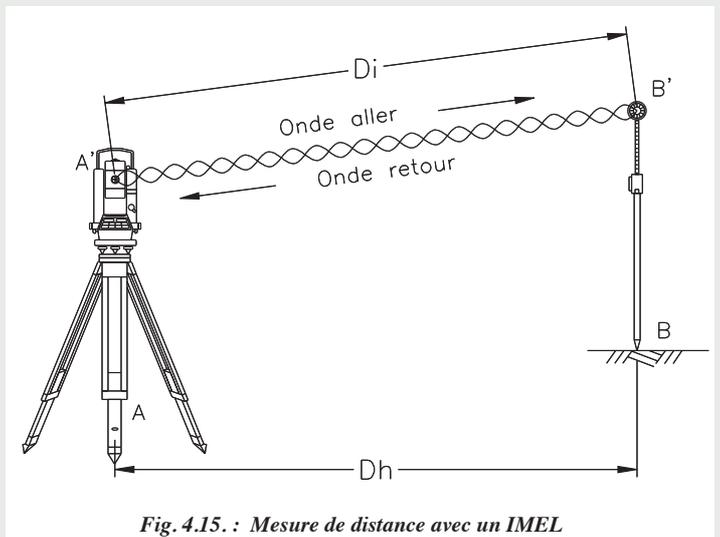


Fig. 4.15. : Mesure de distance avec un IMEL